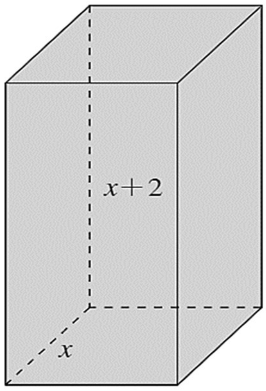
Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Teorema de Bolzano-Cauchy



1. Na figura ao lado observa-se um prisma quadrangular regular em que a aresta da base mede $x\ dm$ e a altura mede mais $2\ dm$ do que a aresta da base.

1.1. Mostre que o volume do sólido é dado, em função da medida da aresta da base x, por:

$$V(x) = x^3 + 2x^2, x > 0$$

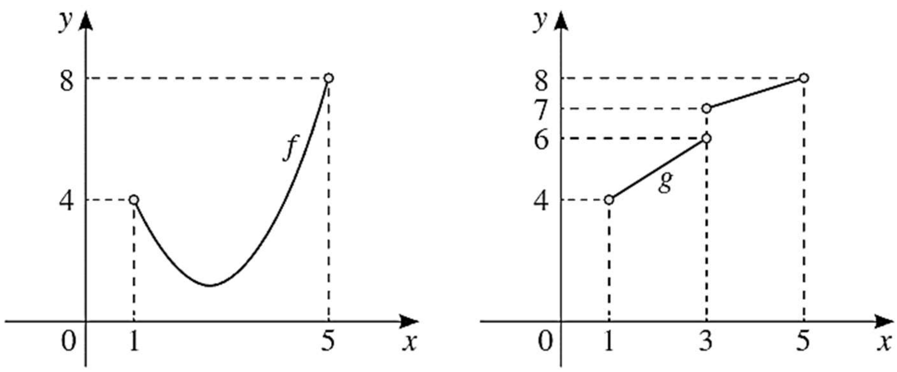
1.2. Determine o volume do prisma se a aresta da base medir $2\ dm$.

1.3. Traduza por uma equação a frase:

«Existe um prisma do tipo do indicado em que o volume é de $4\ dm^3$.»

Sem a resolver, justifique que a mesma tem pelo menos uma solução.

2. Considere as funções f e g de domínio $[1, 5]$ representadas graficamente nas figuras seguintes:



2.1. Indique o número de soluções das seguintes equações:

2.1.1. $f(x) = 5$

2.1.2. $f(x) = 4$

2.1.3. $g(x) = 5$

2.1.4. $g(x) = \frac{13}{2}$

2.2. Indique, justificando, qual das seguintes afirmações é verdadeira:

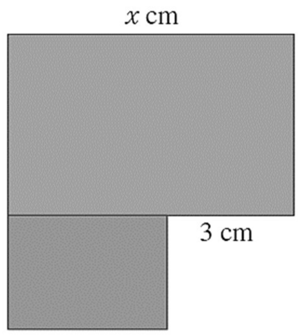
2.2.1. Para qualquer $k \in]4, 8[$, a equação $f(x) = k$ é possível.

2.2.2. Para qualquer $k \in]4, 8[$, existe $c \in]1, 5[$, tal que $g(c) = k$.

3. Seja f a função definida por $f(x) = x^4 - 2x$.

Mostre que a equação $f(x) = -\frac{1}{2}$ tem pelo menos uma solução em $]0, 1[$.

4. A figura seguinte tem uma área de 40 cm^2 no total e é formada por dois retângulos, sendo que a área do retângulo menor é de 10 cm^2. Mostre que:



4.1. O perímetro da figura em função de x é dado pela expressão:

$$P(x) = 2x + \frac{60}{x} + \frac{20}{x-3}$$

4.2. $\exists\, c \in]4, 5[: P(x) = 35$

E interprete o significado desta expressão no contexto do problema considerado.

5. Demonstre o corolário do teorema de Bolzano-Cauchy.

6. Considere a função

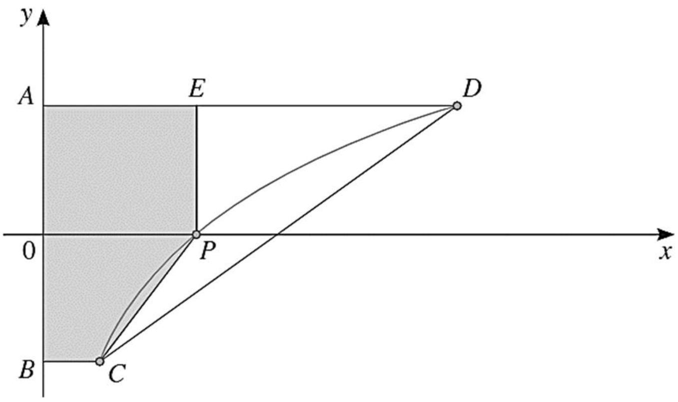
$$g(x) = x^4 - 3x + 1$$

Mostre que g tem pelo menos dois zeros: um em $[0, 1]$ e outro em $[1, 2]$.

7. Na figura estão representados um pentágono $[ABCPE]$ e uma restrição da função $f(x) = \frac{x-1}{x}$ ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

O segmento de reta $[AD]$ é paralelo a Ox e o ponto P é um ponto móvel do gráfico de f, que se desloca de C para D.

Mostre que ao longo do percurso de P a área de $[ABCPE]$ toma valores inteiros e indique esses valores.



8. Considere as funções:

$$f(x) = \frac{x}{2} \qquad e \qquad g(x) = 2\sin(x)$$

Mostre que os gráficos de f e g se intersetam em $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

Soluções

1.

1.1.

O volume do sólido é dado em função da medida da aresta da base x por:

$V(x) = x^2(x+2) \Leftrightarrow V(x) = x^3 + 2x^2$

1.2.

$V(2) = 2^2(2+2) \Leftrightarrow V(2) = 16 \text{ dm}^3$

1.3.

$\exists\, c \in \mathbb{R}^+ \colon V(c) = 4$

Como V é contínua e 4 é um valor intermédio entre 0 e 16, existe certamente um prisma do tipo indicado para o qual o volume é de 4 dm^3.

2.

2.1.

2.1.1. 1 solução

2.1.2. 2 soluções

2.1.3. 1 solução

2.1.4. 0 soluções

2.2.

2.2.1.

$\forall\, k \in \left]4, 8\right[\colon f(x) = k$ é possível.

Verdadeira.

2.2.2.

$\forall\, k \in \left]4, 8\right[\ \exists\, c \in \left]1, 5\right[\colon g(c) = k$

Considerando $k = \frac{13}{2}$, não existe $c \in \left]1, 5\right[$ nas condições pretendidas, pelo que a afirmação é falsa.

3.

f é contínua em $\mathbb{R}$, por ser uma função polinomial. Em particular, é contínua em $\left]0, 1\right[$.

Tem-se que: $f(0) = 0 > -\frac{1}{2}$ e $f(1) = -1 < -\frac{1}{2}$

Ou seja, $f(1) < -\frac{1}{2} < f(0)$.

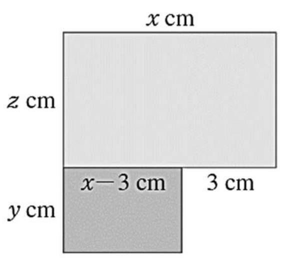
Então, o teorema de Bolzano-Cauchy permite garantir que a equação $x^4 - 2x = -\frac{1}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]0, 1\right[$.

Sabe-se que as soluções estão no intervalo aberto, porque $f(0) \neq -\frac{1}{2}$ e $f(1) \neq -\frac{1}{2}$.

4.

4.1.

Sejam y e z os comprimentos indicados na figura.



$y(x-3) = 10 \Leftrightarrow y = \frac{10}{x-3}$

$xz = 30 \Leftrightarrow z = \frac{30}{x}$

$P = x + 2z + 3 + 2y + x - 3 \Leftrightarrow$

$P(x) = x + 2 \times \frac{30}{x} + 3 + 2 \times \frac{10}{x-3} + x - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(x) = 2x + \frac{60}{x} + \frac{20}{x-3}$

4.2.

$\exists\, c \in \,]4, 5[: P(x) = 35$

A função é contínua em $\mathbb{R}^+ \backslash \{0, 3\}$ por ser a soma de funções racionais.

Em particular, é contínua em $[4, 5]$.

Tem-se que: $P(4) = 43$

$P(5) = 32$

Ou seja: $P(5) < 35 < P(4)$

Então, o teorema de Bolzano-Cauchy permite garantir que
$\exists\, c \in \,]4, 5[: P(c) = 35$, o que, no contexto do problema, significa que existe um valor para o comprimento do retângulo, para o qual o perímetro da figura é 35 cm .

5.

Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b], (a < b)$, tal que $f(a) \times f(b) < 0$, ou seja, $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários.

Consideremos o caso $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, ou seja, $f(a) < 0 < f(b)$.

Então, o teorema de Bolzano-Cauchy permite garantir que $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]a, b[$, ou seja, a função f tem pelo menos um zero em $]a, b[$.

O raciocínio é análogo para o caso em que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$.

6.

A função g é contínua em $\mathbb{R}$, por ser uma função polinomial.
Em particular é contínua em $[0, 1]$ e $[1, 2]$.

$g(0) = 1 > 0$ e $g(1) = -1 < 0$. Então, $g(0) \times g(1) < 0$.

Portanto, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um zero em $]0, 1[$ e, consequentemente, em $[0, 1]$.

Analogamente,

$g(1) = -1 < 0$ e $g(2) = 11 > 0$. Então, $g(1) \times g(2) < 0$.

Portanto, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um zero em $]1, 2[$ e, consequentemente, em $[1, 2]$.

7.

Seja $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ a abcissa de P .

Então, a área do pentágono é dada, em função de x , por:

$$A(x) = x \times \left(\frac{3-1}{3} - \frac{x-1}{x}\right) + \frac{x + \frac{1}{2}}{2} \times \left(\frac{x-1}{x} - \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{8x^2 + 12x - 3}{12x}$$

A função A é contínua em $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$, pois é uma restrição de uma função racional.

$A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$ $\qquad A(3) = \frac{35}{12}$

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a função A toma todos os valores entre $\frac{5}{6}$ e $\frac{35}{12}$.

Assim, a área assume os valores inteiros 1 e 2 .

8.

Considere-se a função h, definida por $h(x) = f(x) - g(x) = \frac{x}{2} - 2\sin(x)$.

A função h é contínua em $\mathbb{R}$, porque é a diferença de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ (uma linear e uma função seno), portanto, em particular é contínua em $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} h\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0 \\ h\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12} - 2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) > 0 \end{array}\right\} \text{ logo , } h\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times h\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0$$

Portanto, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um $c \in \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right[: h(c) = 0$.

$h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c)$.

Assim, podemos concluir que os gráficos de f e g se intersetam em $\left]\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right[$ e, consequentemente, em $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$.