Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Definição de probabilidade condicionada

1. Considere a experiência que consiste no lançamento de dois dados equilibrados, um preto e um vermelho, ambos com as faces numeradas de 1 a 6. Sejam os acontecimentos:

   A: "A soma dos números saídos é maior do que 6"

   B: "A soma dos números saídos é par"

   1.1. Determine $P(A)$ e $P(B)$.

   1.2. Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada:

   1.2.1. $P(B|A)$

   1.2.2. $P(A|B)$

2. De dois acontecimentos, A e B de um espaço de resultados finito E, sabe-se que:

   - $P(\bar{A}) = 0{,}6$
   - $P(B) = 0{,}7$
   - $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}7$

   2.1. Justifique que os acontecimentos A e B são compatíveis.

   2.2. Determine:

   2.2.1. $P(A|B)$

   2.2.2. $P(A \cup B)$

3. O Nuno, para se deslocar de casa para a escola, costuma ir no carro da mãe ou de autocarro.

   O horário de trabalho da mãe permite-lhe ir com ela 76% das vezes. Como o trânsito está cada vez mais complicado, a probabilidade de chegar atrasado às aulas, independentemente do transporte utilizado, é de 15%. A probabilidade de chegar atrasado e ir com a mãe é de 7%.

   3.1. Determine, sob a forma de percentagem, a probabilidade de o Nuno ir de autocarro e chegar atrasado.

   3.2. Os pais do Nuno receberam em casa uma carta da escola que os informava de que o seu educando tinha algumas faltas de atraso aos primeiros tempos. Os pais, obviamente, ficaram muito apreensivos e, numa conversa com o Nuno, tentaram perceber qual seria o melhor meio de transporte a utilizar para diminuir o número de faltas de atraso.
   Determine a probabilidade de o Nuno não chegar atrasado se for de autocarro ou se for no carro da mãe e conclua qual é a melhor opção para solucionar o problema.

4. O clube de voleibol organiza todos os anos um torneio de verão com o objetivo de captar jovens atletas.

Ao longo dos anos observou-se o comportamento disciplinar dos atletas participantes, assim como se esses jovens conseguiam ser contratados pelo clube.

Concluiu-se que, participando no torneio, a probabilidade de um jovem ser:

- Disciplinado é igual a $0{,}64$;
- Disciplinado e não conseguir contrato é igual a $0{,}4$;
- Contratado e não ser disciplinado é igual a $0{,}06$.

4.1. Determine a probabilidade de um jovem participante ser contratado pelo clube e ser disciplinado.

4.2. Será que o facto de ser disciplinado aumenta a probabilidade de um atleta ser contratado pelo clube? Justifique a sua resposta.

5. O presidente da direção de uma empresa de construção civil reformou-se, pelo que é necessário eleger um novo presidente de entre os elementos da direção.

Nessa empresa, 20% dos funcionários são engenheiros e 20% são gestores.

Sabe-se que 75% dos engenheiros ocupam um lugar de direção e 50% dos gestores também. Dos restantes funcionários, apenas 20% ocupam um cargo de direção.

Determine a probabilidade de o futuro presidente ser um engenheiro.

6. Retiraram-se algumas cartas de um baralho de 52 cartas.

De entre as que ficaram, verificou-se que, considerando os acontecimentos, A: "sair um ás" e C: "sair uma carta de copas", se tem: $P(A) = 0{,}12$; $P(C) = 0{,}32$ e $P(\bar{A} \cap \bar{C}) = 0{,}6$.

6.1. Construa uma tabela que resuma os dados e complete-a.

6.2. Justifique que o ás de copas está entre as cartas que ficaram.

6.3. Das cartas que ficaram foi extraída uma carta que se verificou ser de copas. Determine a probabilidade de essa carta não ser um ás. Apresente o resultado sob a forma de fração irredutível.

Soluções

1.

Na tabela seguinte, podemos visualizar todas as somas possíveis:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1.1.

$$P(A) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} \qquad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

1.2.

Por observação da tabela, $P(A \cap B) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.

1.2.1.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{3}{7}$$

1.2.2.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{1}{2}$$

2.

2.1.

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}7 \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0{,}7 \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = 0{,}7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}3$

$P(A \cap B) \neq 0$, pelo que $A \cap B \neq \varnothing$, e assim os acontecimentos A e B são compatíveis.

2.2.

2.2.1.

Temos que $P(\overline{A}) = 0{,}6$, pelo que $P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Então:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{0{,}3}{0{,}7} \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{3}{7}$$

2.2.2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}3 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}8$

3.

Considerem-se os acontecimentos:

C: «O Nuno vai de carro para a escola.»

A: «O Nuno chega atrasado.»

Sabe-se que $P(C) = 76\ \%$, $P(A) = 15\ \%$ e $P(A \cap C) = 7\ \%$.

Organizando os dados numa tabela, tem-se:

	C	$\overline{C}$	
A	7	8	15
$\overline{A}$	69	16	85
	76	24	100

3.1. $P(A \cap \overline{C}) = 8\ \%$

3.2.

$$P(\overline{A}|C) = \frac{P(\overline{A} \cap C)}{P(C)} = \frac{69}{76}$$

$$P(\overline{A}|\overline{C}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

Como $\frac{69}{76} > \frac{2}{3}$, então, a melhor opção para o Nuno é ir de carro com a mãe, pois a probabilidade de não chegar atrasado é maior.

4.

Considerem-se os acontecimentos:

D: «O jovem é disciplinado.»

C: «O jovem consegue ser contratado.»

Sabe-se que $P(D) = 0{,}64$, $P(D \cap \overline{C}) = 0{,}4$ e $P(C \cap \overline{D}) = 0{,}06$.

Organizando os dados numa tabela, tem-se:

	C	$\overline{C}$	
D	0,24	0,4	0,64
$\overline{D}$	0,06	0,3	0,36
	0,30	0,7	1

4.1. $P(C \cap D) = P(D) - P(D \cap \overline{C}) \Leftrightarrow P(C \cap D) = 0{,}64 - 0{,}4 \Leftrightarrow P(C \cap D) = 0{,}24$

4.2.

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} \Leftrightarrow P(C|D) = \frac{0{,}24}{0{,}64} \Leftrightarrow P(C|D) = \frac{3}{8}$$

$$P(C|\overline{D}) = \frac{P(C \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} \Leftrightarrow P(C|\overline{D}) = \frac{0{,}06}{0{,}36} \Leftrightarrow P(C|\overline{D}) = \frac{1}{6}$$

Como $P(C|D) > P(C|\overline{D})$, então, o facto de o atleta ser disciplinado aumenta a probabilidade de ser contratado pelo clube.

5.

Como não é dada qualquer outra informação, assume-se que todos os elementos da direção têm igual probabilidade de ser presidente da empresa. Pretende-se, então, saber qual é a probabilidade de um elemento da direção, escolhido ao acaso, ser engenheiro.

Consideremos os seguintes acontecimentos:

E: «O funcionário é engenheiro.»

G: «O funcionário é gestor.»

D: «O funcionário tem cargo de direção.»

Pretende-se calcular o valor de $P(E|D)$.

Então, de acordo com a informação disponível, temos que:

$P(E) = 0{,}2$; $P(G) = 0{,}2$; $P(\overline{E} \cap \overline{G}) = 0{,}6$

Sabe-se ainda que:

$P(D|E) = 0{,}75$; $P(D|G) = 0{,}5$; $P(D|\overline{E} \cap \overline{G}) = 0{,}2$

Então, a probabilidade de um dos funcionários escolhidos ao acaso ser engenheiro e da direção é dada por:

$P(E \cap D) = P(E) \times P(D|E) = 0{,}2 \times 0{,}75 = 0{,}15$

Por outro lado, a probabilidade de ser um funcionário com cargo diretivo é dada por:

$$P(D) = P(E \cap D) + P(G \cap D) + P\big((\overline{E} \cap \overline{G}) \cap D\big) =$$
$$= 0{,}15 + P(G) \times P(D|E) + P(\overline{E} \cap \overline{G}) \times P(D|\overline{E} \cap \overline{G}) =$$
$$= 0{,}15 + 0{,}2 \times 0{,}5 + 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}37$$

Utilizando, agora, a definição de probabilidade condicionada, vem

$$P(E|D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}15}{0{,}37} = \frac{15}{37}$$

Portanto, a probabilidade de o futuro presidente ser um engenheiro é de $\frac{15}{37}$.

6.

6.1.

	C	$\overline{C}$	
A	0,04	0,08	0,12
$\overline{A}$	0,28	0,6	0,88
	0,32	0,68	1

6.2.

Como:

$P(A \cap C) = 0{,}04 \neq 0$

conclui-se que o acontecimento «sair o ás de copas» não é impossível.

Então, essa carta está nas que ficaram.

6.3.

$$P(\overline{A}|C) = \frac{0{,}28}{0{,}32} = \frac{7}{8}$$