Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

Teoremas de comparação para funções

1. Sejam f e g duas funções de domínio D, $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D, $M \in \mathbb{R}^+$, tais que:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$
- $\forall\, x \in D, |g(x)|M$

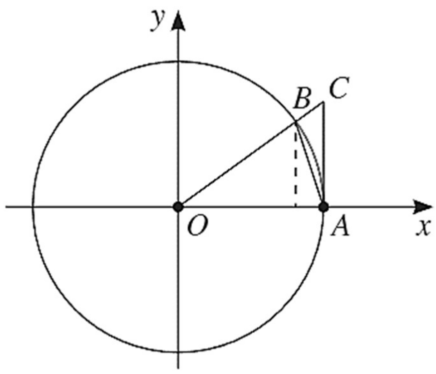
1.1. Justifique que:

$$-Mf(x) \leq (fg)(x) \leq Mf(x)$$

1.2. Conclua que:

$$\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$$

2. Na figura ao lado estão representados em referencial o.n. xOy, uma circunferência de raio 1 e centro na origem, o arco AB dessa circunferência e os triângulos $[OBA]$ e $[OAC]$.



Sabe-se que:

- A é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox;
- B é um ponto do 1º quadrante que pertence à circunferência;
- C é o ponto da reta OB com abcissa igual à abcissa de A.

Seja x a amplitude em radianos do arco AB.

2.1. Justifique que as áreas dos triângulos $[OBA]$ e $[OAC]$ e do setor circular OAB são, respetivamente, $\frac{\sin x}{2}$, $\frac{\tan x}{2}$ e $\frac{x}{2}$, e conclua que, para todo o $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

2.2. Usando o resultado anterior, justifique que, para todo o $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

E, pelo teorema das funções enquadradas, que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Soluções

1.

1.1. $\forall x \in D, \left|g(x)\right| < M \Leftrightarrow -M < g(x) < M \Rightarrow -M\left|f(x)\right| \leqslant (fg)(x) \leqslant M\left|f(x)\right|$

1.2.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, pelo que $\lim\limits_{x \to a}[-Mf(x)] = \lim\limits_{x \to a}[Mf(x)] = 0$

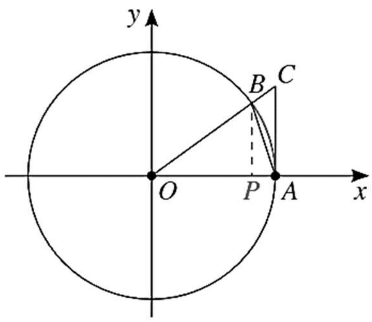
Logo, pelo teorema das funções enquadradas, $\lim\limits_{x \to a}(fg)(x) = 0$

2.

2.1.

Seja x a amplitude em radianos, do arco AB . Será, também a amplitude do ângulo AOB .

Seja P o ponto marcado no referencial.



$$A_{[OBA]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{BP}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{[OBA]} = \frac{1 \times \sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}$$

$$A_{[OAC]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AC}}{2} \Leftrightarrow A_{[OAC]} = \frac{1 \times \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$$

$$A_{\text{setor } OAB} = \frac{x \times 1^2}{2} \Leftrightarrow A_{\text{setor } OAB} = \frac{x}{2}$$

Por observação da figura $A_{[OBA]} \leqslant A_{[\text{setor } OAB]} \leqslant A_{[OAC]}$, pelo que

$$\frac{\sin x}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\tan x}{2} \Leftrightarrow \sin x \leqslant x \leqslant \tan x \ , \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

2.2.

Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ $(\sin x > 0)$

$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sin x} \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{\tan x}{\sin x} \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \to 0^+}(1) = 1 \ \text{ e } \ \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(0^+)} = 1$$

Logo, pelo teorema das funções enquadradas, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$.