| Nome do aluno | Nº | Data |
| --- | --- | --- |
| | | / / 20 |

# Propriedades das probabilidades

1. Numa caixa existem bolas amarelas, vermelhas e roxas indistinguíveis ao tato. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar uma bola, ao acaso, da caixa e anotar a sua cor.

   Sejam $A$, $B$ e $C$ os acontecimentos associados a esta experiência:

   A: "a bola é amarela"  B: "A bola é vermelha"  C: "A bola é roxa"

   Sabe-se que:

   - $P(A) = 0{,}4$
   - $P(A \cup B) = 0{,}7$

   Determine:

   1.1. $P(B)$  1.2. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$  1.3. $P(A \cup C)$

2. Seja $E$ o espaço amostral finito associado a uma experiência aleatória e $A$ e $B$ tais que $A, B \ \in P(E)$.

   Mostre que: $P(B \backslash A) = \mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(\mathrm{A})$.

3. Considere o espaço de resultados finito $E$ e $A$ e $B$ tais que $A \subset E$ e $B \subset E$.

   Sabe-se que:

   - $P(A) = 0{,}3$
   - $P(B) = 0{,}25$
   - $P(A \cap B) = 0{,}25$

   Determine:

   3.1. $P(A \cap \bar{B})$
   3.2. $P(A \cup \bar{B})$

4. Seja $E$ o espaço amostral associado a uma experiência aleatória e $A$ e $B$ dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

   Sabe-se que:

   - $P(A \cup B) = 0{,}65$
   - $P(B \backslash A) = 0{,}5$

   Determine $P(A)$.

5. Uma máquina funciona com dois sistemas distintos, um manual e outro eletrónico.

   A probabilidade de o sistema manual funcionar é de $0{,}78$ e a probabilidade de o sistema eletrónico funcionar é de $0{,}85$. A probabilidade de funcionarem simultaneamente os dois sistemas é de $0{,}68$.

   Determine a probabilidade de funcionamento da máquina.

6. A Joana e o Luís vão realizar o exame de condução.

A probabilidade da Joana ser aprovada é de $0{,}5$, a probabilidade do Luís ser aprovado é de $0{,}4$ e a probabilidade de ambos passarem no exame é de $0{,}1$.

Calcule a probabilidade de:

6.1. Pelo menos um deles ser aprovado.
6.2. Nenhum ser aprovado.
6.3. Apenas um deles ser aprovado.

7. Seja $E$ o espaço de resultados finito associado a uma experiência aleatória. Sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$). Utilize as propriedades das probabilidades para provar que:

7.1. Se $A$ e $B$ são incompatíveis, então $P(\bar{A})P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A)P(B)$
7.2. $P(A \cup B) - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(A) - P(\bar{B})$

8. Numa caixa há cinco bolas brancas, três bolas pretas e duas bolas vermelhas.

Retiram-se, sucessivamente, três bolas da caixa, sem reposição. Determine a probabilidade de obter:

8.1. Uma bola branca, depois de uma preta e, por fim, uma vermelha.
8.2. Uma bola de cada cor.
8.3. Três bolas da mesma cor.

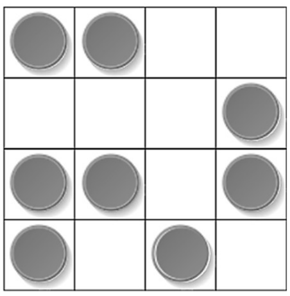
9. Escolhendo ao acaso dois vértices de um cubo, calcule a probabilidade de estes:

9.1. Não estarem na mesma face.
9.2. Estarem em faces opostas.

10. Considere todos os números de nove algarismos distintos que se podem formar com os dígitos de 1 a 9.

10.1. Quantos desses números são pares?
10.2. Escolhendo-se ao acaso um desses números pares, determine a probabilidade de esse número ter exatamente dois dígitos ímpares juntos.

11. Considere uma grelha quadrada com 16 quadrículas. Nesta grelha vão ser colocadas aleatoriamente 8 fichas iguais, e não mas do que uma por quadrícula com, por exemplo, na figura ao lado.



Qual é a probabilidade de:

11.1. As duas diagonais ficarem preenchidas?
11.2. Unicamente uma linha ficar totalmente preenchida?
11.3. Ficarem preenchidas duas colunas?
11.4. Ficarem preenchidas duas linhas não adjacentes?

**Soluções**

1.

1.1. $A \cap B = \emptyset$ , logo, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow 0{,}7 = 0{,}4 + P(B) \Leftrightarrow P(B) = 0{,}3$

1.2. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

1.3.

$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \Leftrightarrow 0{,}4 + 0{,}3 + P(C) = 1 \Leftrightarrow P(C) = 0{,}3$

$A \cap B = \emptyset$ , logo, $P(A \cup C) = P(A) + P(C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cup C) = 0{,}4 + 0{,}3 \Leftrightarrow P(A \cup C) = 0{,}7$

2. $P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - [P(A) + P(B) - P(A \cup B)] = P(A \cup B) - P(A)$

3.

3.1. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3 - 0{,}25 \Leftrightarrow P(A \cap \overline{B}) = 0{,}05$

3.2.

$P(B) = 0{,}25$ , pelo que $P(\overline{B})\ 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) \Leftrightarrow P(A \cup \overline{B}) = 0{,}3 + 0{,}75 - 0{,}05 \Leftrightarrow P(A \cup \overline{B}) = 1$

4.

$P(B \backslash A) = 0{,}5 \Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 \qquad (*)$

$P(A \cup B) = 0{,}65 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}65 \underset{(*)}{\Leftrightarrow} P(A) + 0{,}5 = 0{,}65 \Leftrightarrow P(A) = 0{,}15$

5.

Consideremos os acontecimentos:

$M$: «O sistema manual funcionar.»

$E$: «O sistema eletrónico funcionar.»

Temos que: $P(M) = 0{,}78$ , $P(E) = 0{,}85$ e $P(M \cap E) = 0{,}68$

A máquina funciona se funcionar pelo menos um dos dois sistemas,
pelo que se pretende determinar $P(M \cup E)$ .

$P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E) \Leftrightarrow P(M \cup E) = 0{,}78 + 0{,}85 - 0{,}68 \Leftrightarrow P(M \cup E) = 0{,}95$

6.

Consideremos os acontecimentos:

$A$: «A Joana é aprovada.»

$B$: «O Luís é aprovado.»

Sabemos que: $P(A) = 0{,}5$ , $P(B) = 0{,}4$ e $P(A \cap B) = 0{,}1$

6.1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}1 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}8$

6.2. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

6.3. $P(A \backslash B) + P(B \backslash A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 2 \times 0{,}1 = 0{,}7$

7.

7.1.

$A$ e $B$ são incompatíveis, logo, $A \cap B = \emptyset$ e $P(A \cap B) = 0$ .

$$P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) - P(\overline{A \cup B}) =$$

$$= 1 - P(B) - P(A) + P(A)P(B) - (1 - P(A \cup B)) =$$

$$= 1 - P(B) - P(A) + P(A)P(B) - 1 + P(A \cup B) =$$

$$= -P(B) - P(A) + P(A)P(B) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A)P(B)$$

**7.2.**

$$P(A \cup B) - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(A \cup B) - P(\overline{A \cap B}) =$$
$$= P(A \cup B) - 1 + P(A \cap B) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - 1 + P(A \cap B) =$$
$$= P(A) - (1 - P(B)) =$$
$$= P(A) - P(\overline{B})$$

**8.**

**8.1.**

$$p = \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \Leftrightarrow p = \frac{1}{24}$$

**8.2.**

$$p = \frac{{}^5C_1 \times {}^3C_1 \times {}^2C_1}{{}^{10}C_3} \Leftrightarrow p = \frac{5 \times 3 \times 2}{120} \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$$

**8.3.**

$$p = \frac{{}^5C_3 + {}^3C_3}{{}^{10}C_3} = \frac{11}{120}$$

**9.**

**9.1.**

Número de casos possíveis: ${}^8C_2 = 28$

Número de casos favoráveis: $4$

(Para não estarem na mesma face, os dois vértices têm de ser extremos das diagonais espaciais do cubo.)

$$p = \frac{4}{28} \Leftrightarrow p = \frac{1}{7}$$

**9.2.** Quaisquer dos vértices do cubo estão em faces opostas, logo, $p = 1$ .

**10.**

**10.1.**

Para que o número seja par, o último algarismo tem de ser par, ou seja, existem apenas quatro hipóteses para o último algarismo e, como os algarismos têm de ser distintos, restam oito algarismos que podem permutar entre si.

Assim, existem $8! \times 4 = 161\,280$ números nas condições pedidas.

**10.2.**

Temos quatro posições para os dois algarismos ímpares consecutivos:

IIPIPIPIP IPIIPIPIP IPIPIIPIP IPIPIPIIP

Em cada uma das posições anteriores, os algarismos são distintos e podem permutar: pares com pares e ímpares com ímpares.

Então: $p = \dfrac{4 \times 5! \times 4!}{161\,280} = \dfrac{1}{14}$

**11.**

**11.1.**

$$\frac{1}{{}^{16}C_8} = \frac{1}{12\,870}$$

**11.2.**

$$\frac{4 \times ({}^{12}C_4 - 3)}{12\,870} = \frac{328}{2145}$$

**11.3.**

$$\frac{{}^{4}C_2}{12\,870} = \frac{1}{2145}$$

**11.4.**

$$\frac{3}{12\,870} = \frac{1}{4290}$$