Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Funções de referência para a primitivação

1. Determine a primitiva F de cada uma das funções seguintes sabendo que o ponto de coordenadas $(0, 2)$ pertence ao gráfico de F.

   1.1. $f(x) = x$

   1.2. $g(x) = x^4$

   1.3. $h(x) = e^x$

   1.4. $i(x) = \sin x$

2. Considere a função f de domínio $[-\pi, \pi]$, tal que:

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

   2.1. Justifique que a função F de domínio $[-\pi, \pi]$ definida por $F(x) = -\cos x - \sin x$ é uma primitiva de f.

   2.2. Defina analiticamente uma função G, primitiva de f, de domínio $[-\pi, \pi]$, tal que $G(\pi) = 1$.

3. Calcule, em intervalos convenientes, as seguintes primitivas:

   3.1. $\int (3x^2 + 2x)\, dx$

   3.2. $\int 5 \cos x\, dx$

   3.3. $\int \frac{3}{x}\, dx$

   3.4. $\int \left(4e^x + \frac{\sin x}{2}\right) dx$

   3.5. $\int 2\sin(2x)\, dx$

   3.6. $\int 2^x\, dx$

   3.7. $\int \left(e^{4x} + \frac{2}{x}\right) dx$

   3.8. $\int \left(3\sqrt{4}x + 4x^5\right) dx$

Soluções

1.

1.1.

$$F(x) = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c \qquad F(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{0}{2} + c = 2 \Leftrightarrow c = 2$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2$$

1.2.

$$G(x) = \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c \qquad G(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{0}{5} + c = 2 \Leftrightarrow c = 2$$

$$G(x) = \frac{x^5}{5} + 2$$

1.3.

$$H(x) = \int e^x dx = e^x + c \qquad H(0) = 2 \Leftrightarrow e^0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 1$$

$$H(x) = e^x + 1$$

1.4.

$$I(x) = \int \sin x dx = -\cos x + c \qquad I(0) = 2 \Leftrightarrow -\cos 0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 3$$

$$I(x) = -\cos x + 3$$

2.

2.1.

$\forall \in [-\pi, \pi]$, $F'(x) = (-\cos x - \sin x)' = \sin x - \cos x = f(x)$,
logo, F é uma primitiva de f.

2.2.

Qualquer primitiva de f é da forma $G(x) = -\cos x - \sin x + c$

$G(\pi) = 1 \Leftrightarrow -\cos \pi - \sin \pi + c = 1 \Leftrightarrow 1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 0$

$G(x) = -\cos x - \sin x$

3.

3.1.

$$\int (3x^2 + 2x)dx = 3\int x^2 dx + 2\int x dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + c = x^3 + x^2 + c$$

3.2.

$$\int 5 \cos x\, dx = 5 \int \cos x\, dx = 5 \sin x + c$$

3.3.

$$\int \frac{3}{x} dx = 3\int \frac{1}{x} dx = 3 \ln |x| + c\,, \text{ para } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

3.4.

$$\int\left(4e^x + \frac{\sin x}{2}\right)dx = 4\int e^x dx + \frac{1}{2}\int \sin x\, dx = 4e^x - \frac{\cos x}{2} + c$$

3.5.

$$\int 2 \sin (2x)dx = \int (2x)' \sin (2x)dx = -\cos (2x) + c$$

3.6.

$$\int 2^x dx = \int e^{x\ln 2} dx = \frac{1}{\ln 2} \int \ln 2\, e^{x\ln 2}\, dx = \frac{1}{\ln 2} e^{x\ln 2} + c = \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

3.7.

$$\int\left(e^{4x}+\frac{2}{x}\right)dx=\int e^{4x}dx+\int\frac{2}{x}dx=\frac{1}{4}\int 4e^{4x}dx+2\int\frac{1}{x}dx=\frac{1}{4}e^{4x}+2\ln x+c\ ,\ x\neq 0$$

3.8.

$$\int(3\sqrt{4x}+4x^5)dx=3\times 2\int\sqrt{x}\,dx+4\int x^5dx=6\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+4\frac{x^6}{6}+6=4\sqrt{x^3}+\frac{2x^6}{3}+c\ ,\ x>0$$