Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Modelos exponenciais

1. O césio 137 sofre decomposição radioativa de acordo com a lei de decaimento radioativo

$$Q(t) = ce^{-0,023t}$$

com o tempo medido em anos.

Determine o tempo necessário para que a quantidade de césio seja reduzida a metade.

2. Admita que o carbono-14 sofre decaimento radioativo de acordo com a fórmula

$$Q(t) = Q_0 e^{-0,00}$$

com t medido em anos.

2.1. Uma amostra vegetal descoberta numa gruta pré-histórica contém apenas 20% do carbono-14 esperado em plantas vivas. Qual é a idade aproximada da amostra?

2.2. Qual é a quantidade de carbono-14 existente numa amostra de origem vegetal datada de aproximadamente $16\ 000$ anos?

3. Uma população de bactérias evolui em função do tempo (em horas) de acordo com o modelo malthusiano:

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

3.1. Admitindo que, numa contagem inicial, existem aproximadamente 5000 bactérias e, numa segunda contagem, passadas 4 horas, existem cerca de $100\ 000$, determine:

3.1.1. Os parâmetros N_0 e k;

3.1.2. A quantidade aproximada de bactérias previstas numa contagem intermédia, duas horas após a contagem inicial.

3.2. Se apenas se souber que o número de bactérias duplica ao fim de duas horas, que parâmetro é possível determinar: N_0 ou k?

4. Uma cultura de bactérias triplica a cada hora.

Sabe-se que, no instante inicial ($t = 0$), estão presentes 10^6 bactérias.

4.1. Justifique que o número de bactérias $N(t)$ é aproximado em cada instante t medido em horas por:

$$N(t) = 10^6 e^{1,1t}$$

4.2. Quanto tempo será necessário para que a cultura atinja as 10^8 bactérias? Apresente o resultado aproximado ao minuto.

4.3. Qual é a taxa de crescimento instantânea da população ao fim de uma hora?

5. Durante um certo período, o número de ursos numa reserva natural é dado por $P(t)$, em que t é o tempo, em anos, decorrido a partir de 1 de janeiro de 1990.

A função P verifica

$$P'(t) = \frac{1}{125}P(t)(100 - P(t))$$

5.1. Mostre que a função dada pela expressão

$$P(t) = \frac{100}{1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}}, A \in \mathbb{R}$$

satisfaz a equação diferencial.

5.2. Calcule o valor da constante A em função da população inicial $P(0) = P_0$.

5.3. Qual é a evolução da população se $P_0 = 100$? Interprete o resultado obtido.

6. Uma pequena barra metálica à temperatura de 150 °C é imersa num grande recipiente com água a 5 °C. Passados 2 minutos verifica-se que a temperatura da barra é 60 °C.

Ao fim de quanto tempo terá a temperatura da barra atingido os 10 °C?

(*Nota: deves usar a lei do arrefecimento de Newton*)

7. A um individuo é ministrada uma injeção de $250\ mg$ de antibiótico no instante $t = 0$.

Suponha que a quantidade de antibiótico, em miligramas, presente no sangue após t horas, verifica

$$f(t) = 250e^{-0,7t}$$

7.1. Qual é a taxa de decréscimo inicial de f, isto é, $f'(0)$?

7.2. Ao fim de quanto tempo é o antibiótico injetado reduzido a 10% da quantidade inicial? Apresente o resultado em horas, arredondado às décimas.

Soluções

1.

$$Q(0) = C$$

$$Q(t) = \frac{C}{2} \Leftrightarrow Ce^{-0,023t} = \frac{C}{2} \Leftrightarrow -0,023t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,023t = -\ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,023} \Leftrightarrow t \approx 30,137$$

A quantidade de césio é reduzida a metade em, aproximadamente, 30 anos.

2.

2.1.

$Q_o \rightarrow$ quantidade inicial de carbono-14

$$Q(t) = 0,2Q_o \Leftrightarrow Q_o\, e^{-0,00012t} = 0,2Q_o \Leftrightarrow -0,00012t = \ln(0,2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,2)}{-0,00012} \Leftrightarrow t \approx 13\,411,98$$

13 412 anos

2.2.

$$Q(16\,000) = Q_o\, e^{-0,00012 \times 16\,000} = Q_o\, e^{-1,92} \approx 0,15Q_o$$

Aproximadamente, 15 % de quantidade de carbono-14 inicial.

3.

3.1.

3.1.1.

$$N(0) = 5000 \Leftrightarrow N_0 = 5000$$

$$N(4) = 100\,000 \Leftrightarrow 5000e^{4k} = 100\,000 \Leftrightarrow e^{4k} = 20 \Leftrightarrow 4k = \ln 20 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 20}{4}$$

$$N_0 = 5000 \text{ e } k = \frac{\ln 20}{4}$$

3.1.2.

$$N(2) = 5000 \times e^{2 \times \frac{\ln 20}{4}} \Leftrightarrow N(2) \approx 22\,361$$

3.2.

$$N(2) = 2 \times N_0 \Leftrightarrow N_0 e^{2k} = 2 \times N_0 \Leftrightarrow 2k = \ln 2 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{2}$$

4.

4.1.

O número de bactérias será dado por uma expressão do tipo:

$N(t) = N_0 e^{kt}, k \in \mathbb{R}$. $N(0) = 10^6 \Leftrightarrow N_0 = 10^6$

Sabe-se que o número de bactérias triplica a cada hora, pelo que

$N(t+1) = 3 \times N(t)$

$$N(t+1) = 3 \times N(t) \Leftrightarrow 10^6 \times e^{k(t+1)} = 10^6 \times 3e^{kt} \Leftrightarrow e^{kt+k} = 3e^{kt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{kt} \times e^{k} = 3e^{kt} \Leftrightarrow e^{k} = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3 \Leftrightarrow k \approx 1,1$$

Assim, o número de bactérias é dado por $N(t) = 10^6 e^{1,1t}$.

4.2.

$$N(t) = 10^8 \Leftrightarrow 10^6 e^{1,1t} = 10^8 \Leftrightarrow e^{1,1t} = 10^2 \Leftrightarrow 1,1t = \ln(100) \Leftrightarrow t = \frac{\ln 100}{1,1} \Leftrightarrow t \approx 4,187$$

$$0,187 \times 60 = 11,22$$

A cultura atingirá as 10^8 bactérias após 4 horas e 11 minutos.

4.3.

$$N'(t) = 10^6 \times 1{,}1e^{1{,}1t}$$
$$N'(1) = 1{,}1 \times 10^6 e^{1{,}1} \approx 3\,304\,583$$

5.

5.1.

$$P(t) = \frac{100}{1 + Ae^{-\frac{4}{5t}}}\ ,\ A \in \mathbb{R}$$

$$P'(t) = \frac{-100 \times \left(-\frac{4}{5}Ae^{-\frac{4}{5}t}\right)}{\left(1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}\right)^2} = \frac{80Ae^{-\frac{4}{5}t}}{\left(1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}\right)^2}$$

$$\frac{1}{125}P(t)(100 - P(t)) = \frac{100}{125} \times P(t) - \frac{\left[P(t)\right]^2}{125} =$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{100}{1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}} - \frac{1}{125} \times \left(\frac{100}{1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}}\right)^2$$

$$= \frac{80}{1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}} - \frac{80}{\left(1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}\right)^2} = \frac{80 \times \left(1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}\right) - 80}{\left(1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}\right)^2}$$

$$= \frac{80Ae^{-\frac{4}{5}t}}{\left(1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}\right)^2} = P'(t)$$

5.2.

$$P(0) = P_0 \Leftrightarrow \frac{100}{1 + Ae^0} = P_0 \Leftrightarrow \frac{100}{1 + A} = P_0 \Leftrightarrow 1 + A = \frac{100}{P_0} \Leftrightarrow A = \frac{100 - P_0}{P_0}$$

5.3.

$$P_0 = 100 \Leftrightarrow A = 0$$
$$P(t) = \frac{100}{1 + 0 \times e^{-\frac{4}{5}t}} = 100$$

Se $P_0 = 100$, a população mantém-se constante e igual a 100.

6.

Pela lei do arrefecimento de Newton, $T(t) = T_a - (T_a - T_0)e^{-kt}$

$T(t) = 5 - (5 - 150)e^{-kt} \Leftrightarrow T(t) = 5 + 145e^{-kt}$

Como, ao fim de 2 minutos, a temperatura da barra desce para 60 °C :

$T(120) = 60 \Leftrightarrow 5 + 145e^{-120k} = 60 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 145e^{-120k} = 55 \Leftrightarrow e^{-120k} = \frac{55}{145} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -120k = \ln\left(\frac{55}{145}\right) \Leftrightarrow k \approx 0{,}00808$

$T(t) = 10 \Leftrightarrow 5 + 145e^{-0{,}00808t} = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 145e^{-0{,}00808t} = 5 \Leftrightarrow e^{-0{,}00808t} = \frac{5}{145} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0{,}00808t = \ln\left(\frac{55}{145}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{5}{145}\right)}{-0{,}00808} \Leftrightarrow t = 416{,}74$$

$416{,}74 : 60 = 6{,}9$

A temperatura da barra atinge os $10\ °C$ ao fim de, aproximadamente, 7 minutos.

7.

7.1. $f'(t) = -175e^{-0{,}7t}$ $\qquad$ $f'(0) = -175e^{0} = -175$

7.2.

$$250e^{-0{,}7t} = 0{,}1 \times 250 \Leftrightarrow e^{-0{,}7t} = 0{,}1 \Leftrightarrow -0{,}7t = \ln(0{,}1) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}1)}{-0{,}7} \Leftrightarrow t \approx 3{,}29$$

Ao fim de, aproximadamente, $3{,}3$ horas.