Ficha de treino | **Matemática** | **12º ano**

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Nome do aluno | **Nº** | **Data** / / 20

Limites notáveis (II)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

1. Calcule os limites seguintes efetuando, se necessário, mudanças de variável:

1.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi^x}{x^6}$

1.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x x^5)$

1.3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{e^{\tan x}}{\tan x}$

2. Calcule:

2.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln}{x^3+4x-1}$

2.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x}$

2.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{e^x}$

3. Estude, quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico, a função definida por:

3.1. $f(x) = e^x(x^2 + 4x - 3)$

3.2. $g(x) = e^x - 10x$

3.3. $h(x) = x - \ln x$

3.4. $i(x) = \frac{e^{-3x}}{1+x^2}$

4. Calcule os seguintes limites:

4.1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\sqrt{x} \ln x\right)$

4.2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{\ln(x+1)}$

4.3. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

5. Determine, caso existam, as equações das assíntotas ao gráfico das funções definidas por:

5.1. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

5.2. $g(x) = \frac{2+3\ln x}{x-1}$

5.3. $h(x) = \frac{3^{2x}-9}{x^2-4x+3}$

Soluções

1.

1.1.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi^x}{x^6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{\ln\pi}\right)^x}{x^6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln\pi}}{x^6}\overset{(*)}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{\left(\dfrac{y}{\ln\pi}\right)^6}=(\ln\pi)^6\times\lim_{x\to+\infty}\frac{e^y}{y^6}=+\infty$$

(*) Fazendo $y=x\ln\pi$, $y\to+\infty$, se $x\to+\infty$.

1.2.

$$\lim_{x\to-\infty}(e^x x^5)=e^{-\infty}\times(-\infty)=0$$

1.3.

$$\lim_{x\to\frac{\pi^-}{2}}\frac{e^{\tan x}}{\tan x}\overset{(*)}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}=+\infty$$

(*) Fazendo $y=\tan x$, $y\to+\infty$, se $x\to\dfrac{\pi^-}{2}$.

2.

2.1.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3+4x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\left(x^2+4-\dfrac{1}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{x^2+4x-\dfrac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+4-\dfrac{1}{x}}=$$

$$=0\times\frac{1}{+\infty}=0$$

2.2.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\ln x}{\ln 10}}{x}=\frac{1}{\ln 10}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{\ln 10}\times 0=0$$

2.3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}\times\frac{\ln x}{x}\right)=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=$$

$$=\frac{1}{+\infty}\times 0=0$$

3.

3.1.

$f(x)=e^x(x^2+4x-3)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x(x^2+4x-3)=+\infty$

O gráfico de f não admite assíntota horizontal quando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^x(x^2+4x-3)\overset{(*)}{=}\lim_{y\to+\infty}e^{-y}(y^2-4y-3)=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2\left(1-\dfrac{4}{y}-\dfrac{3}{y^2}\right)}{e^y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^y}\times\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{4}{y}-\frac{3}{y^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^y}{y^2}}\times 1=\frac{1}{+\infty}=0$$

(*) Fazendo $y=-x$, $y\to+\infty$, se $x\to-\infty$.

$y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, quando $x\to+\infty$.

3.2.

$g(x) = e^x - 10x$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^x - 10x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x\left(\frac{e^x}{x} - 10 \right) \right) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^x - 10x) = e^{-\infty} - (-\infty) = +\infty$

O gráfico de g não admite assíntotas horizontais.

3.3.

$h(x) = x - \ln x$ $\qquad\qquad D_h = \mathbb{R}^+$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \times (1 - 0) = +\infty$

O gráfico de h não admite assíntotas horizontais.

3.4.

$i(x) = \frac{e^{-3x}}{1 + x^2}$

$\lim_{x \to +\infty} i(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-3x}}{1 + x^2} = \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = 0$

$y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de i, quando $x \to +\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} i(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-3x}}{1 + x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \overset{(*)}{=}$

$= \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{\left(-\frac{y}{3}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\left(-\frac{y}{3}\right)^2}\right)} = 9 \times \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y^2} \times \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{y^2}{9}}} =$

$= 9 \times (+\infty) \times 1 = +\infty$

(*) Fazendo $y = -3x$, $y \to +\infty$, se $x \to -\infty$.

4.

4.1.

$\lim_{x \to 0^+} \left(\sqrt{x} \ln x \right) \overset{(*)}{=} \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y^2}\right) = \lim_{y \to +\infty} \left(-\frac{\ln y^2}{y} \right) =$

$= -2 \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} = -2 \times 0 = 0$

(*) Fazendo $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y \to +\infty$, se $x \to 0^+$.

$\sqrt{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y^2}$

4.2.

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x\left(e^x - 1\right)}{\ln\left(x+1\right)} = \lim_{x \to 0} \left[e^x \times \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{\ln\left(x+1\right)} \right] =$

$= \lim_{x \to 0} \left(e^x \times \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{\frac{\ln\left(x+1\right)}{x}} \right) = e^0 \times 1 \times \frac{1}{1} = 1$

4.3.

$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} \overset{(*)}{=} \lim_{y \to 0} \frac{\ln\left(y+1\right)}{y} = 1$

(*) Fazendo $y = x - 1$, $y \to 0$, se $x \to 1$.

5.

5.1.

$f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \qquad D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Assíntotas verticais:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \times e^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y \to 0^+} \frac{e^y}{y} = \frac{e^{0^+}}{0^+} = +\infty$

$x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

Quando $x \to \pm\infty$

$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\pm\infty}} = 1$

$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right) \overset{(*)}{=} \lim\limits_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

(*) Fazendo $y = \frac{1}{x}$, $y \to 0$, se $x \to \pm\infty$.

$y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f.

5.2.

$g(x) = \frac{2 + 3\ln x}{x - 1} \qquad D_g = \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

Assíntotas verticais:

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{2 + 3\ln x}{x - 1}\right) = \frac{2 + 3\ln 0^+}{0^+ - 1} = \frac{2 + 3\times(-\infty)}{-1} = +\infty$

$x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de g.

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{2 + 3\ln x}{x - 1}\right) = \frac{2 + 3\ln 1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{2 + 3\ln x}{x - 1}\right) = \frac{2 + 3\ln 1}{0^+} = +\infty$

$x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de g.

Assíntotas não verticais:

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 + 3\ln x}{x(x - 1)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x(x - 1)} + 3\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x(x - 1)} =$

$= 0 + 3 \times \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0 + 3 \times 0 = 0$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2 + 3\ln x}{x - 1}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x - 1}\right) + 3 \times \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x - 1}\right) = 0 + 3 \times 0 = 0$

$y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g.

5.3.

$$h(x) = \frac{3^{2x} - 9}{x^2 - 4x + 3} = \frac{9^x - 9}{(x-1)(x-3)} \qquad D_h = \mathbb{R}^+ \setminus \{1, 3\}$$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} \frac{3^{2x} - 9}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \to 1} \frac{9(9^{x-1} - 1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{9^{x-1} - 1}{x - 1} \times \lim_{x \to 1} \frac{9}{x-3} \overset{(*)}{=} \lim_{y \to 0} \frac{9^y - 1}{y} \times \left(-\frac{9}{2}\right)$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{e^{y \ln 9} - 1}{y \ln 9} \times \ln 9 \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{9 \ln 9}{2}$$

(*) Fazendo $y = x - 1$, $y \to 0$, se $x \to 1$.

$x = 1$ não é assíntota vertical ao gráfico de h .

Quando $x \to 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{3^{2x} - 9}{(x-1)(x-3)} = \frac{3^{2 \times 3} - 9}{(3-1)(3^- - 3)} = \frac{3^6 - 9}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} h(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{3^{2x} - 9}{(x-1)(x-3)} = \frac{3^{2 \times 3} - 9}{(3-1)(3^+ - 3)} = \frac{3^6 - 9}{0^+} = +\infty$$

$x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

Assíntotas não verticais:

Quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{9^x - 9}{x\left(x^2 - 4x + 3\right)} = +\infty$$

Quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{9^x - 9}{x\left(x^2 - 4x + 3\right)} = \frac{-9}{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{9^x - 9}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-9}{+\infty} = 0$$

$y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de h .