Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Limites notáveis (I)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^b}, b \in \mathbb{R}$$

1. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = e^x - x^2$$

1.1. Prove que f tem pelo menos um zero em $[-1, 0]$.

1.2. Mostre que a função f', derivada de f, tem mínimo igual a $2 - \ln 4$.

1.3. Justifique que $2 - \ln 4 > 0$ e conclua que f é crescente.

1.4. Justifique que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x^2$$

2. Calcule:

2.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x^2+3x-1}$

2.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+2}{e^x+x}$

2.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \times \sin x\right)$

Soluções

1.

1.1.

f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, por ser uma soma de duas funções contínuas. Em particular, é contínua em $[-1, 0]$.

$f(0) = e^0 = 1 > 0$

$f(-1) = e^{-1} - (-1)^2 = \frac{1}{e} - 1 < 0$

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, f tem pelo menos um zero em $]-1, 0[$ e, consequentemente, em $[-1, 0]$.

1.2.

$f'(x) = e^x - 2x$ $\qquad\qquad$ $f''(x) = e^x - 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$f'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - \ln 2^2 = 2 - \ln 4$

Assim, $f'(x)$ atinge um mínimo $2 - \ln 4$, no ponto de abcissa $\ln 2$.

1.3.

$e^2 > 4 \Leftrightarrow \ln e^2 > \ln 4 \Leftrightarrow \ln e^2 - \ln 4 > 0 \Leftrightarrow 2 - \ln 4 > 0$

Como $2 - \ln 4$ é um mínimo absoluto da derivada e $2 - \ln 4 > 0$, então, $f'(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$, pelo que f é crescente.

1.4.

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > x^2$

Se, por exemplo, $x = -2$ a igualdade não se verifica.

2.

2.1.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x^2 + 3x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2\left(2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} = +\infty \times \frac{1}{2} = +\infty$$

2.2.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{e^x + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{x}{e^x}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{\frac{e^x}{x}}} = \frac{1}{+\infty} \times \frac{1 + \frac{2}{+\infty}}{1 + \frac{1}{+\infty}} = 0 \times 1 = 0$$

2.3.

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{e^x} \times \sin x\right)$$

Quando $x \to +\infty, \frac{x}{e^x} > 0$, logo, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{e^x} \leqslant \frac{x}{e^x} \times \sin x \leqslant \frac{x}{e^x}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$. Analogamente, $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{x}{e^x}\right) = 0$.

Assim, pelo teorema das funções enquadradas, $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{e^x} \times \sin x\right) = 0$.