Ficha de treino Matemática 11º ano

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

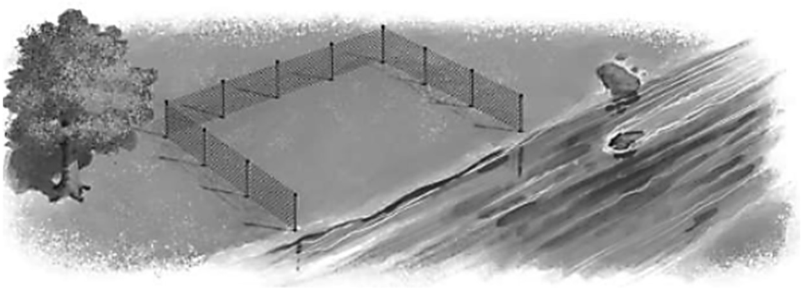
Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

Problemas de otimização

1. Pretende-se vedar $200\ m^2$ de terreno na margem de um rio, como mostra a figura, utilizando o mínimo de rede possível e de modo a forma um retângulo.

   O terreno será vedado por uma rede cujo custo é de 2,5 euros por metro.

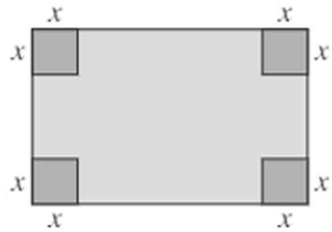
   Determine quais devem ser as dimensões do terreno e qual será o preço da rede.



2. De todos os retângulos de área $24\ cm^2$, determine as dimensões do que tem perímetro mínimo.

3. A partir de uma cartolina retangular com $30\ cm$ de comprimento e $20\ cm$ de largura pretende-se construir uma caixa sem tampa, cortando nos quatro cantos um quadrado de lado $x\ cm$, como ilustra a figura ao lado.

   De todas as caixas que é possível construir, nas condições referidas, determine as dimensões da que tem maior volume.

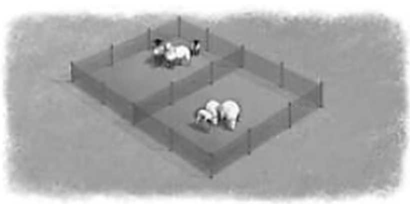


4. Uma empresa de fabrico de embalagens para conservas recebeu uma encomenda de latas cilíndricas, sem tampa, com capacidade para 250 mililitros, em folha de Flandres.

   Determine as dimensões de cada lata de forma a minimizar a quantidade de folha de Flandres utilizada.

   (Nota: 1 litro equivale a 1 decímetro cúbico)

5. O Sr. Joaquim pretende construir, na sua quinta, um curral retangular dividido ao meio por uma rede paralela a um dos lados.
   Para vedar o curral e dividi-lo, dispõe de 15 metros de rede.
   Determine as dimensões do curral de forma que este tenha a maior área possível.

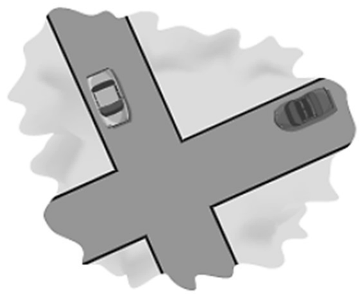


6. O custo por quilómetro de um cabo elétrico é dado por

$$c(x) = \frac{12}{x} + 60x$$

   em que x representa a área da sua secção em cm^2.
   Determine a área da secção para a qual o preço do quilómetro do cabo é mínimo.

7. Num jogo de computador, dois carros circulam à mesma velocidade em estradas perpendiculares, aproximando-se de um cruzamento. Num dado instante, um dos carros encontra-se a 1 quilómetro do cruzamento e o outro a 2 quilómetros.

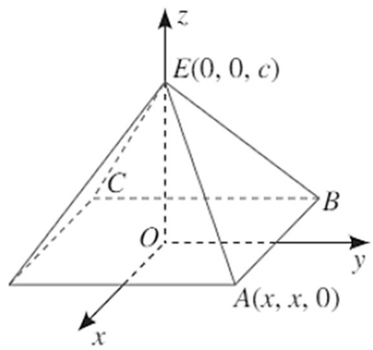


7.1. Sendo x a distância percorrida, em quilómetros, a partir desse instante por cada um dos carros, justifique que a distância entre os dois carros, à medida que se aproximam do cruzamento, é dada em função de x por:

$$d(x) = \sqrt{(1-x)^2 + (2-x)^2}, x \geq 0$$

7.2. Calcule o valor de x para o qual a distância entre os dois carros é a menor possível e indique, para esse valor de x, a posição de cada carro em relação ao cruzamento.

8. Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular de base $[ABCD]$ contida no plano xOy e centrada na origem do referencial.



Admita que:

- O vértice E, pertencente ao semieixo positivo Oz. Tem coordenadas $(0, 0, c), 0 < c < 6$;
- O vértice A tem abcissa igual à ordenada;
- Sendo x a abcissa de A e c a cota de E, tem-se $x + c = 6$.

8.1. Mostre que, em função de x, $0 < x < 6$, o volume da pirâmide é dado por:

$$v(x) = 8x^2 - \frac{4}{3}x^3$$

8.2. Determine o valor de x para o qual o volume da pirâmide é máximo e determine o valor desse volume.

8.3. Admita agora que agora que $x = 1$. Indique para este caso as coordenadas dos pontos A, B e E e determine uma equação cartesiana do plano ABE.

Soluções

1.

Sejam x e y as dimensões do terreno. Então, $y = \dfrac{200}{x}$.

Se x for a medida, em metros, dos lados perpendiculares ao rio, o comprimento da rede em função de x é:

$$C(x) = (2x + y) = \frac{2x^2 + 200}{x}$$

Assim:

$$C'(x) = \left(\frac{2x^2 + 200}{x}\right)' = \frac{(2x^2 + 200)'x - (2x^2 + 200)(x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{4x^2 - 2x^2 - 200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 10$$

Então:

x	0		10	$+\infty$
$C'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
C	n.d.	↘	Mín.	↗

Logo, as dimensões devem ser $x = 10$ m e $y = \dfrac{200}{10} = 20$ m.

O preço da rede será $40 \times 2{,}5 = 100$ €.

NOTA: O sinal de $C'(x)$ apenas depende do sinal do numerador, pois $x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

2. A

Considere-se $x > 0$ e $y > 0$ as medidas dos lados, em centímetros, de um retângulo de área 24 cm^2. Tem-se que:

$$x \times y = 24 \Leftrightarrow y = \frac{24}{x}$$

Então, o perímetro do retângulo é dado em função de x por:

$$f(x) = \frac{48}{x} + 2x = \frac{48 + 2x^2}{x}, \text{ com } x \in \mathbb{R}^+$$

Então, neste contexto, $D_f = \mathbb{R}^+$.

Calcule-se a derivada de f:

$$f'(x) = \frac{(48 + 2x^2)'x - (48 + 2x^2)(x)'}{x^2} = \frac{4x^2 - 48 - 2x^2}{x^2} = \frac{2x^2 - 48}{x^2}$$

Calcule-se os zeros de f':

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Assim:

x	0		$2\sqrt{6}$	$+\infty$
$f'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	↘	Mín.	↗

Pode-se concluir que f assume um mínimo relativo em $x = 2\sqrt{6}$, que é o mínimo absoluto de f.

Então, para $x = 2\sqrt{6}$, $y = \dfrac{24}{2\sqrt{6}} = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$. Logo, as dimensões do retângulo com perímetro mínimo são $2\sqrt{6}$ cm por $2\sqrt{6}$ cm, isto é, é um quadrado de lado $2\sqrt{6}$ cm.

3.

Tem-se que:

$V_{\text{caixa}}(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$, com $x \in \left]0, 10\right[$

Então, neste contexto, $D_V = \left]0, 10\right[$.

Calcule-se a derivada de V :

$$V'(x) = 12x^2 - 200x + 600$$

Calculando os zeros de V' :

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 200x + 600 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{200 \pm \sqrt{(-200)^2 - 4 \times 12 \times 600}}{2 \times 12} \underset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{200 \pm 40\sqrt{7}}{24} = \frac{25 \pm 5\sqrt{7}}{3}$$

Assim:

x	0		$\frac{25-5\sqrt{7}}{3}$		10
$V'(x)$	n.d.	+	0	−	n.d.
V	n.d.	↗	Máx.	↘	n.d.

Logo, o volume é máximo para $x = \frac{25 - 5\sqrt{7}}{3}$.

Portanto, as dimensões da caixa devem ser:

Altura: $\frac{25 - 5\sqrt{7}}{3}$ cm

Comprimento: $30 - 2x = \frac{40 + 10\sqrt{7}}{3}$ cm

Largura: $20 - 2x = \frac{10 + \sqrt{7}}{3}$ cm

4.

Considere-se $x > 0$ e $y > 0$ como as medidas do raio da base e da altura da lata, respetivamente, em decímetros.

Tem-se que a área da lata é dada por $\pi x^2 + 2\pi xy$.

Como 250 mL equivalem a 0,25 L , tem-se:

$$V(x) = \pi x^2 \times y \Leftrightarrow \pi x^2 \times y = 0{,}25 \Leftrightarrow y = \frac{0{,}25}{\pi x^2}$$

Obtém-se, assim, $A(x) = \pi x^2 + 2\pi x \frac{0{,}25}{\pi x^2} = \pi x^2 + \frac{1}{2x}$, que dá a área da lata em função de x .

Então, neste contexto, $D_A = \mathbb{R}^+$.

Calcule-se a derivada de A :

$$A'(x) = 2\pi x - \frac{1}{2x^2} = \frac{4\pi x^3 - 1}{2x^2}$$

Calcule-se os zeros de A' :

$$4\pi x^3 - 1 = 0 \wedge 2x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4\pi}} \wedge x \neq 0$$

Assim:

x	0		$\frac{1}{\sqrt[3]{4\pi}}$	$+\infty$
$A'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
A	n.d.	↘	Mín.	↗

Logo, a área da lata é mínima para $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4\pi}}$.

Portanto, as dimensões da lata devem ser:

Raio da base: $\frac{1}{\sqrt[3]{4\pi}} \approx 0{,}43$ dm

Altura: $\frac{0{,}25}{\pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4\pi}}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4\pi}}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt[3]{4\pi}\right)^2}{4\pi} \approx 0{,}43$ dm

5.

Considere-se $x > 0$ e $y > 0$ como as medidas de comprimento do curral, em metros.

Tem-se que a área do curral é dada por xy .

Para vedar o curral são necessários $2x + 3y$ metros de rede.

Tem-se:

$$2x + 3y = 15 \Leftrightarrow y = \frac{15 - 2x}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 5$$

Assim, a área do curral é dada em função de x por:

$$A(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 5x$$

Neste contexto, $D_A =]0; 7{,}5[$.

Calcule-se a derivada de A :

$$A'(x) = -\frac{4}{3}x + 5$$

Calcule-se os zeros de A' :

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15}{4}$$

Assim:

x	0		$\frac{15}{4}$		7,5
$A'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
A	n.d.	↗	Máx.	↘	n.d.

Logo, a área do curral é máxima para $x = \frac{15}{4} = 3{,}75$.

Portanto, o comprimento deve ser igual a 3,75 m e a largura igual a $-\frac{2}{3} \times 3{,}75 + 5 = 2{,}5$ m .

6.

$c'(x) = -\frac{12}{x^2} + 60 = \frac{60x^2 - 12}{x^2}$ e o domínio de c' no contexto do problema é $]0, +\infty[$.

$60x^2 - 12 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \vee x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

x	0		$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$+\infty$
$c'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$c(x)$	n.d.	↘	Mín.	↗

Logo, a área da secção para a qual o preço do quilómetro do cabo é mínima é $\frac{\sqrt{5}}{5}$ cm^2 .

7.

7.1.

Considere-se um referencial ortonormado com origem no cruzamento destas duas estradas e cujos eixos Ox e Oy coincidem com o primeiro carro e com o segundo carro, respetivamente.

Então, a posição dos carros neste referencial é dada por $(0, 1 - x)$ e $(2 - x, 0)$.

Logo:

$d(x) = \sqrt{(2 - x - 0)^2 + (0 - 1 + x)^2} = \sqrt{(2 - x)^2 + (-1 + x)^2} =$
$= \sqrt{(1 - x)^2 + (2 - x)^2}, \forall \geqslant 0$

7.2.

$d(x) = \sqrt{(1 - x)^2 + (2 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x^2 - 4x + 4} =$
$= \sqrt{2x^2 - 6x + 5}, x \geqslant 0$

$d'(x) = (2x^2 - 6x + 5)' \times \frac{1}{2\sqrt{2x^2 - 6x + 5}} = \frac{4x - 6}{2\sqrt{2x^2 - 6x + 5}} =$
$= \frac{2x - 3}{\sqrt{2x^2 - 6x + 5}}$

$2x - 3 = 0 \wedge \sqrt{2x^2 - 6x + 5} \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$d'(x)$	$-$	0	$+$
d	↘	Mín.	↗

$d\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{2}\right) + 5} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$ km

Portanto, a distância é menor quando $x = 1{,}5$ km . Ambos os carros se encontram a 0,5 km de distância do cruzamento (um deles já passou o cruzamento em 0,5 km e o outro está a 0,5 km do cruzamento).

8.

8.1.

A base da pirâmide é um quadrado de lado $2x$ e a altura da pirâmide é a cota c do ponto E.

Uma vez que $x + c = 6$, vem que $c = 6 - x$.

Logo:

$$v(x) = \frac{A_{\text{base}} \times c}{3} = \frac{4x^2 \times (6-x)}{3} = \frac{24x^2 - 4x^3}{3} = 8x^2 - \frac{4}{3}x^3$$

$$D_v = \{x \in \mathbb{R}: 6 - x > 0 \wedge x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 6\} =]0, 6[$$

8.2.

$v'(x) = 16x - 4x^2$

$v'(x) = 0 \Leftrightarrow 16x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x(16 - 4x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

Como $0 < x < 6$, tem-se que:

x	0		4		6
$v'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
v	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

$$v(4) = 8 \times 4^2 - \frac{4}{3} \times 4^3 = \frac{128}{3}$$

Portanto, o volume da pirâmide é máximo quando $x = 4$, sendo esse volume igual a $\frac{128}{3}$ u. v.

8.3.

Tem-se que $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$ e $E(0, 0, 5)$.

Um vetor perpendicular ao plano ABE é um vetor perpendicular a dois vetores não colineares do plano, como, por exemplo, $\overrightarrow{AB}(-2, 0, 0)$ e $\overrightarrow{AE}(-1, -1, 5)$.

Seja $\vec{u}(a, b, c)$ um vetor perpendicular a estes dois vetores, então:

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-2, 0, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, -1, 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 0 \\ -a - b + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 5c \end{cases}$$

Fazendo, por exemplo, $c = 1$, vem $\vec{u}(0, 5, 1)$.

Assim, uma equação de um plano perpendicular a $\vec{u}$ é da forma:

$$5y + z + d = 0$$

Como o plano ABE contém o ponto $A(1, 1, 0)$, obtém-se $d = -5$.

Portanto, uma equação cartesiana do plano ABE é $5y + z - 5 = 0$.