Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

Derivada de uma potência de expoente real

1. Considere a função f, de domínio $[0,5]$, definida por:

$$f(x) = x^2 - x\ln(x+3)$$

Sabe-se que:

- B é um ponto do gráfico de f;
- A reta de equação $y = 5x$ é paralela à reta tangente ao gráfico de f no ponto B.

Determine, recorrendo à calculadroa gráfica, a abcissa do ponto B.

Na sua resposta deve:

- Equacionar o problema;
- Reproduzir o(s) gráfico(s) que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- Indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

2. Considere a função g definida por:

$$g(x) = 1 + \ln(e^2x^2) + \ln\frac{1}{x}$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, mostre que:

2.1. $g(x) = 3 + \ln x$

2.2. g é crescente.

2.3. A reta de equação $y = e^x x$ é tangente ao gráfico de g no ponto de ordenada 1.

Soluções

1.

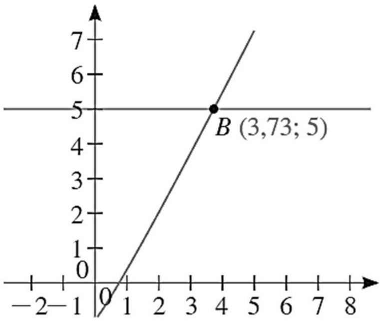
Seja $B(b, y)$

$f'(x) = 2x - \ln(x+3) - \dfrac{x}{x+3}$

Como a reta de equação $y = 5x$ é paralela à reta tangente ao gráfico de f no ponto B, então, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa b tem declive 5.

Assim: $f'(b) = 5 \Leftrightarrow 2b - \ln(b+3) - \dfrac{b}{b+3} = 5$

Graficamente:



$f'(b) = 5 \Leftrightarrow b \approx 3{,}73$

2.

2.1.

$$g(x) = 1 + \ln(e^2x^2) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln e + \ln(e^2x^2) + \ln(x^{-1}) =$$

$$= \ln(e \times e^2 \times x^2 \times x^{-1}) = \ln(e^3x) = \ln(e^3) + \ln x \Leftrightarrow g(x) = 3 + \ln x$$

2.2.

$g'(x) = \dfrac{1}{x}$

Em $\mathbb{R}^+$, $x > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$, pelo que g é crescente.

2.3.

Determinemos a abcissa do ponto do gráfico de g cuja ordenada é 1:

$g(x) = 1 \Leftrightarrow 3 + \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$

$P\left(\dfrac{1}{e^2}, 1\right)$ pertence ao gráfico de g.

Determinemos o declive da reta:

$m = g'\left(\dfrac{1}{e^2}, 1\right) = e^2$

Se $y = mx + b$ for a equação reduzida da reta, temos que

$1 = e^2 \times \dfrac{1}{e^2} + b \Leftrightarrow b = 1$

Assim, $y = e^2x + 1$ é a equação da reta tangente ao gráfico no ponto de ordenada 1.