Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

1. Considere os conjuntos

$$A=\left\{\frac{1}{2},0,1,\frac{1}{3},3\right\} \qquad e \qquad B=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{6},2,\frac{5}{2},\frac{8}{3},3\right\}$$

e as funções $f: A \to B$ e $g: A \to B$ definidas por:

$$f(x)=\left|\frac{1}{2}-x\right| \qquad e \qquad g(x)=3-x$$

1.1. Determine o contradomínio da função f.
1.2. Justifique que a função f não é injetiva.
1.3. Represente graficamente a função g.
1.4. Mostre que a função g é injetiva.

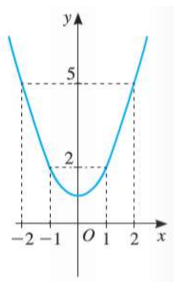
2. Verifique se são ou não injetivas as funções, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

2.1. $f(x)=-4x+3$
2.2. $g(x)=\frac{2x+1}{2}$
2.3. $h(x)=x^2-2$
2.4. $i(x)=\frac{1}{5}-\frac{x}{2}$

3. Diga, justificando, se são sobrejetivas as funções, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

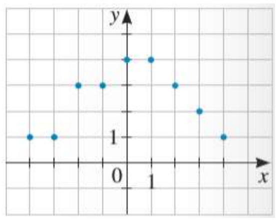
3.1. $f(x)=\frac{x+1}{5}$
3.2. $g(x)=x^2+1$
3.3. $h(x)=-3-2x$
3.4. $i(x)=2+|x|$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida analiticamente por $f(x)=x^2+1$ e representada graficamente na figura.



4.1. Indique o contradomínio de f.
4.2. Indique $f(C)$ em que:
4.2.1. $C=\{-2,-1,0,1,2\}$
4.2.2. $C=[-1,2]$
4.3. A função f é injetiva? Justifique.

5. Na figura está representado o gráfico de uma função f de domínio $\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ e conjunto de chegada $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.



5.1. Justifique que f não é injetiva sem sobrejetiva.
5.2. Seja $A=\{1,2,3,4\}$, determine $f(A)$.
5.3. Indique uma restrição de f que seja injetiva.
5.4. Represente graficamente uma função g com o mesmo domínio e conjunto de chegada de f que seja bijetiva.

Soluções

1.

1.1. Tem-se que:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|=0$$

$$f(0)=\left|\frac{1}{2}-0\right|=\frac{1}{2}$$

$$f(1)=\left|\frac{1}{2}-1\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

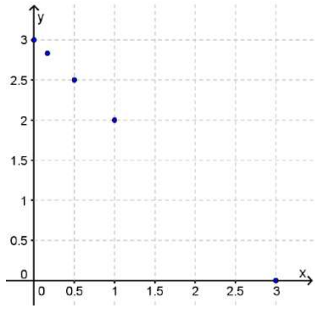
$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{1}{6}\right|$$

$$f(3)=\left|\frac{1}{2}-3\right|=\frac{5}{2}$$

Portanto, $D'_f=\left\{0,\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right\}$

1.2. f não é injetiva porque $f(1)=f(0)$.

1.3.



1.4. Tem-se que

$G_g=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right),(0,3),(1,2),\left(\frac{1}{3},\frac{8}{3}\right),(3,0)\right\}$.

Portanto, g é uma função injetiva porque objetos diferentes têm imagens diferentes.

2.

2.1. Pela definição:

$$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}, f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$$

Assim, $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow -4x_1+3=-4x_2+3\Leftrightarrow x_1=x_2$. Portanto a função f é injetiva.

2.2. Pela definição:

$$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}, g(x_1)=g(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$$

Assim, $g(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow \frac{2x_1+1}{2}=\frac{2x_2+1}{2}\Leftrightarrow x_1=x_2$. Portanto a função g é injetiva.

2.3. Não injetiva, porque $h(-1)=h(1)$.

2.4. Pela definição:

$$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}, i(x_1)=i(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$$

Assim, $i(x_1)=i(x_2)\Leftrightarrow \frac{1}{5}-\frac{x_1}{2}=\frac{1}{5}-\frac{x_2}{2}\Leftrightarrow x_1=x_2$. Portanto a função i é injetiva.

3.

3.1. Pela definição de sobrejetividade:

$\forall y\in\mathbb{R},\exists x\in\mathbb{R}: f(x)=y$.

Tem-se que: $f(x)=y\Leftrightarrow \frac{x+1}{5}=y\Leftrightarrow x=5y-1$.

Logo, para qualquer $y\in\mathbb{R}$ existe um número real x dado por $x=5y-1$, para o qual $f(x)=y$. Portanto, a função f é sobrejetiva.

3.2. A função g não é sobrejetiva pois, por exemplo, $0\notin D'_g$.

3.3. Pela definição de sobrejetividade:

$\forall y\in\mathbb{R},\exists x\in\mathbb{R}: h(x)=y$.

Tem-se que: $h(x)=y\Leftrightarrow -3-2x=y\Leftrightarrow x=\frac{-y-3}{2}$.

Logo, para qualquer $y\in\mathbb{R}$ existe um número real x dado por $x=\frac{-y-3}{2}$, para o qual $h(x)=y$. Portanto, a função h é sobrejetiva.

3.4. A função i não é sobrejetiva pois, por exemplo, $-2\notin D'_i$.

4.

4.1. $D'_f=[1,+\infty[$

4.2.

4.2.1. $f(C)=\{1,2,5\}$

4.2.2. $f(C)=[1,5]$

4.3. A função f é não injetiva poruqe existem objetos diferentes, por exemplo, -1 e 1, que têm a mesma imagem.

5.

5.1. A função f é não injetiva porque existem objetos diferentes: por exemplo, 0 e 1 que têm a mesma imagem. A função f não é sobrejetiva porque o contradomínio ($\{1,2,3,4\}$) não coincide com o conjunto de chegada.

5.2. $f(A)=\{1,2,3,4\}$

5.3. Por exemplo, $f|_A$ (sendo A o conjunto da questão anterior)

5.4.