Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Teoremas de comparação para sucessões

1. Calcule, caso exitam, os seguintes limites:

1.1. $\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)$

1.2. $\lim\frac{(-1)^n}{n}$

1.3. $\lim 2^n$

1.4. $\lim\frac{2n+3}{1-n}$

2. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) de termo geral:

$$u_n=\frac{2n+3}{n+2} \qquad \text{e} \qquad v_n=\frac{3n-8}{n+3}$$

2.1. Determine $p \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n \leq v_n$$

2.2. Calcule e compare $\lim u_n$ e $\lim v_n$.

3. Indique, justificando, o valor lógico da proposição:

«Sejam (u_n) e (v_n) sucessões convergentes, se a partir de certa ordem $u_n < v_n$, então, $\lim u_n < \lim v_n$.»

4. Considere a sucessão (a_n) definida por:

$$a_n=\frac{n+1}{2n+3}$$

4.1. Mostre que $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n \frac{1}{2}$.

4.2. Justifique que (a_n) é monótona crescente e conclua que é convergente.

4.3. Justifique que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $(a_n) \geq 0$ e $(a_n)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4.4. Conclua que $\lim(a_n)^n = 0$.

5. Justifique que $\left(\frac{2n+3}{n}\right)^n > 2^n$ e conclua que $\lim\left(\frac{2n+3}{n}\right)^n = +\infty$.

6. Utilize o teorema das sucessões enquadradas para calcular os limites das sucessões de termos geral:

6.1. $a_n = \frac{\sin(n)}{n+5}$

6.2. $b_n = \frac{n^2+\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n^2+n}$

6.3. $c_n = \left(\frac{2n+1}{5n+3}\right)^n$

7. Considere a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$$

7.1. Mostre que $\forall\, n \in \mathbb{N}, 3 \leq u_n \leq 3 \times 2^{\frac{1}{n}}$.

7.2. Utilize o teorema das sucessões enquadradas para calcular o limite de (u_n).

Soluções

1.

1.1.

$$\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)=\lim 2+\lim\left(\frac{1}{n}\right)=2+0=2$$

1.2.

$$\frac{(-1)^n}{n}\begin{cases}-\dfrac{1}{n}\,, & \text{se } n \text{ ímpar}\\ \dfrac{1}{n}\,, & \text{se } n \text{ par}\end{cases}$$

$$\lim\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim\left(\frac{1}{n}\right)=0\,,\ \text{logo,}\ \lim\frac{(-1)^n}{n}=0$$

1.3.

$$\lim 2^n=+\infty$$

1.4.

$$\lim\frac{2n+3}{1-n}=\lim\left(\frac{2n}{-n}\right)=-2$$

2.

2.1.

$$u_n\leqslant v_n\Leftrightarrow\frac{2n+3}{n+2}\leqslant\frac{3n-8}{n+3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(2n+3)(n+3)}{(n+2)(n+3)}-\frac{(3n-8)(n+2)}{(n+2)(n+3)}\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2n^2+6n+3n+9}{(n+2)(n+3)}-\frac{3n^2+6n-8n-16}{(n+2)(n+3)}\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-n^2+11n+25}{(n+2)(n+3)}\leqslant 0\underset{n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow}-n^2+11n+25\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\leqslant -1{,}93\ \vee\ n\geqslant 12{,}93$$

A partir da ordem $p=13$, tem-se que $\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant p\Rightarrow u_n\leqslant v_n$.

Cálculos auxiliares:

$$-n^2+11n+25=0\Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{11^2-4\times(-1)\times 25}}{2\times(-1)}\Leftrightarrow n\simeq 1{,}93\ \vee\ n\simeq 12{,}93$$

2.2.

$$\lim u_n=\lim\frac{2n+3}{n+3}=\lim\frac{2n}{n}=2$$

$$\lim v_n=\lim\frac{3n-8}{n+3}=\lim\frac{3n}{n}=3$$

$$\lim u_n<\lim v_n$$

3.

Falsidade.

Consideremos, por exemplo, as sucessões $u_n=\dfrac{1}{n+1}$ e $v_n=\dfrac{1}{n}$.

Temos que u_n e v_n são sucessões convergentes e $u_n<v_n$.

No entanto, $\lim u_n=\lim v_n=0$.

4.

4.1.

$$a_n < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n+3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2(n+1)}{2(2n+3)} - \frac{2n+3}{2(2n+3)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+2-2n-3}{2(2n+3)} < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2(2n+3)} < 0$$

Proposição verdadeira. Logo: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n < \frac{1}{2}$

4.2.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)+3} - \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+2}{2n+5} - \frac{n+1}{2n+3} =$$

$$= \frac{(n+2)(2n+3)-(n+1)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)} =$$

$$= \frac{2n^2+3n+4n+6-2n^2-5n-2n-5}{(2n+5)(2n+3)} =$$

$= \frac{1}{(2n+5)(2n+3)} > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, logo, (a_n) é monótona crescente.

$a_1 = \frac{2}{5}$

Tem-se que $\frac{2}{5} \leqslant a_n < \frac{1}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, logo, (a_n) é limitada.

Uma vez que (a_n) é monótona e limitada, então, é convergente.

4.3.

$$a_n \geqslant \frac{2}{5} \Leftrightarrow (a_n)^n \geqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n > 0$$

$$a_n < \frac{1}{2} \Leftrightarrow (a_n)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Assim, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (a_n)^n \geqslant 0$ e $(a_n)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4.4.

$\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ e $0 \leqslant a_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$, pelo que $\lim(a_n)^n \leqslant 0$.

(Teorema das sucessões enquadradas)

5.

$\frac{2n+3}{n} = 2 + \frac{3}{n} > 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Logo, $\left(\frac{2n+3}{n}\right)^n > 2^n$, e como

$\lim 2^n = +\infty$, então, $\lim\left(\frac{2n+3}{n}\right)^n = +\infty$

6.

6.1.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{n+5} \leqslant \frac{\sin(n)}{n+5} \leqslant \frac{1}{n+5}$$

Sabe-se que $\lim\left(-\frac{1}{n+5}\right) = \lim\left(\frac{1}{n+5}\right) = 0$, logo, pelo teorema

das sucessões enquadradas, $\lim \frac{\sin(n)}{n+5} = 0$.

6.2.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \leqslant 1 \Leftrightarrow n^2 - 1 \leqslant n^2 + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \leqslant n^2 + 1 \underset{n^2+n \geqslant 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2-1}{n^2+n} \leqslant \frac{n^2+\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n^2+n} \leqslant \frac{n^2+1}{n^2+n}$$

$$\lim \frac{n^2-1}{n^2+n} = \lim \frac{n^2+1}{n^2+n} = \lim \frac{n^2}{n^2} = 1 \ ,$$

6.3.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{2n+1}{5n+3} > 0 \ , \text{ pelo que } \left(\frac{2n+1}{5n+3}\right)^n > 0$$

Por outro lado,

$$\frac{2(n+1)+1}{5(n+1)+3} - \frac{2n+1}{5n+3} = \frac{2n+3}{5n+8} - \frac{2n+1}{5n+3} =$$

$$= \frac{(2n+3)(5n+3)-(2n+1)(5n+8)}{(5n+8)(5n+3)} =$$

$$= \frac{10n^2+6n+15n+9-(10n^2+16n+5n+8)}{(5n+8)(5n+3)} =$$

$$= \frac{10n^2+6n+15n+9-10n^2-16n-5n-8}{(5n+8)(5n+3)} =$$

$$= \frac{1}{(5n+8)(5n+3)} > 0 \ , \text{ logo, } \frac{2n+1}{5n+3} \text{ é crescente.}$$

$$\lim\left(\frac{2n+1}{5n+3}\right) = \lim\left(\frac{2n}{5n}\right) = \frac{2}{5}$$

Pelo que $\left(\frac{2n+1}{5n+3}\right) < \frac{2}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{2n+1}{5n+3}\right)^n < \left(\frac{2}{5}\right)^n$

Assim, $0 < \left(\frac{2n+1}{5n+3}\right)^n < \left(\frac{2}{5}\right)^n$, logo, pelo teorema das sucessões enquadradas,

$$\lim\left(\frac{2n+1}{5n+3}\right)^n = 0$$

7.

7.1.

$$2^n \leqslant 3^n \Leftrightarrow 2^n + 3^n \leqslant 3^n + 3^n \Leftrightarrow 2^n + 3^n \leqslant 2 \times 3^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leqslant 3 \times 2^{\frac{1}{n}}$$

$$3^n \leqslant 2^n + 3^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{3^n} \leqslant \sqrt[n]{2^n + 3^n} \Leftrightarrow 3 \leqslant \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

$$3 \leqslant u_n \leqslant 3 \times 2^{\frac{1}{n}}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

7.2.

$$\lim\left(3 \times 2^{\frac{1}{n}}\right) = \lim 3 \times 2^{\frac{1}{n}} = 3 \times 2^0 = \lim(3)$$

Assim, pelo teorema das sucessões enquadradas, $\lim \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$.