Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

Propriedades da interseção e união de conjuntos

1. De um baralho de 40 cartas (baralho completo sem os oitos, noves e dez de cada naipe) extraímos, ao acaso, uma carta.

   Considere os seguintes acontecimentos:

   A: “Sair ouros” B: “Sais ás” C: “Sair ás de ouros”

   Indique em extensão:

   1.1. $A \cap B$

   1.2. $B \cup C$

   1.3. $A \cap C$

2. Sejam A e B subconjuntos de um conjunto U.

   Utilize as propriedades das operações com conjuntos para provar que:

   2.1. $(\bar{B} \cup A) \cup B = U$

   2.2. $(\bar{B} \cup A) \cap B = A \cap B$

   2.3. $(B \backslash A) \cup (A \cap B) = B$

   2.4. $(A \backslash B) \cap (A \cap B) = \emptyset$

3. Sejam A e B subconjuntos de um conjunto U.

   Simplifique as seguintes expressões, nomeando as propriedades aplicadas.

   3.1. $A \cup (\overline{A \cap B})$

   3.2. $\overline{A \cap (B \cup \bar{A})}$

   3.3. $\overline{(A \backslash B)} \cap (A \cup B)$

Soluções

1.

1.1. $A \cap B = \{\text{sair ás de ouros}\}$

1.2. Como $C \subset B$, então, $B \cup C = B$, donde $B \cup C = \{\text{sair ás}\}$

1.3. Como $C \subset A$, então, $A \cap C = C$, donde $A \cap C = \{\text{sair ás de ouros}\}$

2.

2.1.

$$(\overline{B} \cup A) \cup B \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. comutativa}}}{=} (A \cup \overline{B}) \cup B \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. associativa}}}{=} A \cup (\overline{B} \cup B) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Ex. 1.1b)}}}{=} A \cup U \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Elem. neutro}}}{=} U$$

2.2.

$$(\overline{B} \cup A) \cap B \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. distributiva}}}{=} (\overline{B} \cap B) \cup (A \cap B) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Ex. 1.1a)}}}{=} \varnothing \cup (A \cap B) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Elem. neutro}}}{=} A \cap B$$

2.3.

$$(B \backslash A) \cup (A \cap B) \underset{\substack{\downarrow \\ B\backslash A = B \cap \overline{A}}}{=} (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. comutativa}}}{=} (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap A) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. distributiva}}}{=}$$

$$= B \cup (\overline{A} \cap A) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. dos conjuntos} \\ \text{complementares}}}{=} B \cup \varnothing \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Elem. neutro}}}{=} B$$

2.4.

$$(A \backslash B) \cap (A \cap B) \underset{\substack{\downarrow \\ A\backslash B = A \cap \overline{B}}}{=} (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. associativa}}}{=} ((A \cap \overline{B}) \cap A) \cap B \underset{\substack{\downarrow \\ (A \cap \overline{B}) \cap A = A \cap \overline{B} \\ \text{porque } A \cap \overline{B} \subset A}}{=}$$

$$= (A \cap \overline{B}) \cap B \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. associativa}}}{=} A \cap (\overline{B} \cap B) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. dos conjuntos} \\ \text{complementares}}}{=} A \cap \varnothing \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Elem.} \\ \text{absorvente}}}{=} \varnothing$$

3.

3.1.

$$A \cup \left(\overline{A \cap B}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Leis de De Morgan}}}{=} A \cup (\overline{A} \cup \overline{B}) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. associativa}}}{=} (A \cup \overline{A}) \cup \overline{B} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. dos conjuntos} \\ \text{complementares}}}{=} U \cup \overline{B} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Elem.} \\ \text{absorvente}}}{=} U$$

3.2.

$$\overline{A \cap \left(B \cup \overline{A}\right)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Leis de De Morgan}}}{=} \overline{A} \cup \overline{\left(B \cup \overline{A}\right)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Leis de De Morgan}}}{=} \overline{A} \cup (\overline{B} \cap A) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. distributiva}}}{=}$$

$$= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup A) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. dos conjuntos} \\ \text{complementares}}}{=} (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap U \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Elem. neutro}}}{=} \overline{A} \cup \overline{B}$$

3.3.

$$\overline{(A \backslash B)} \cap (A \cup B) \underset{\substack{\downarrow \\ A\backslash B = A \cap \overline{B}}}{=} \overline{\left(A \cap \overline{B}\right)} \cap (A \cup B) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Leis de De Morgan}}}{=} (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup B) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. distributiva}}}{=}$$

$$= (\overline{A} \cap A) \cup B \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Prop. dos conjuntos} \\ \text{complementares}}}{=} \varnothing \cup B \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Elem. neutro}}}{=} B$$