Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Noção de primitiva

1. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = 3x^2 + 6x + 2$$

Quais das seguintes expressões podem definir uma função de domínio $\mathbb{R}$ cuja derivada é a função f?

$F(x) = 3x^3 + 3x^2 + 4x + 2$

$H(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 10$

$G(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 3$

$T(x) = x^3 + 6x^2 + x - 1$

2. Sabe-se que g é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que:

$$g'(x) = \sin x$$

2.1. Indique uma função g que verifique as condições do enunciado.

2.2. Mostre que a função g, definida na alínea anterior, não é a única que admite $\sin x$ como derivada.

3. Indique a expressão analítica de duas funções de domínio $\mathbb{R}$ cuja função derivada seja definida por:

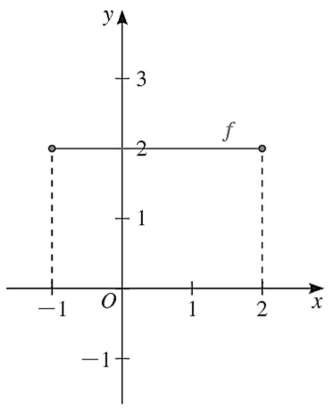
$$f(x) = 3$$

4. Indique três primitivas da função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = e^x$$

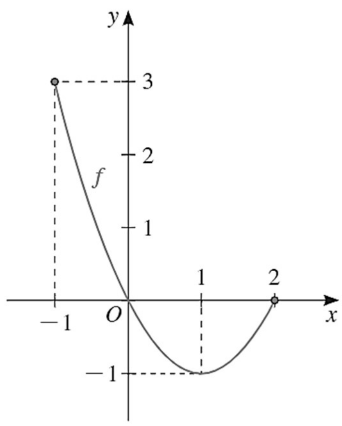
5. Esboce o gráfico de duas funções que sejam primitivas da função f em $[-1, 2]$ representada graficamente em cada uma das alíneas.

5.1.



NOTA: O gráfico de f é um segmento de reta.

5.2.



NOTA: O gráfico de f é um arco de parábola.

6. Considere as funções F e G de domínio $\mathbb{R}^+$ definidas por

$$F(x) = \frac{3x+1}{x} \qquad\qquad G(x) = \frac{x+1}{x}$$

6.1. Mostre que F e G são primitivas da função f de domínio $\mathbb{R}^+$ cuja expressão analítica é $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

6.2. Justifique que $F(x) - G(x) = c, c \in \mathbb{R}$ e determine o valor de c.

7. Determine os valores das constantes k e c de modo que a função real de variável real

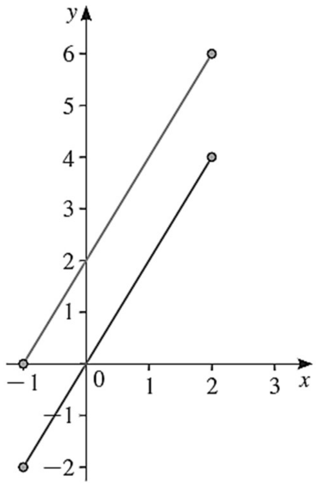
$$F(x) = ke^{3x} + c$$

seja uma primitiva da função definida por $f(x) = e^{3x}$ e $F(0) = 0$.

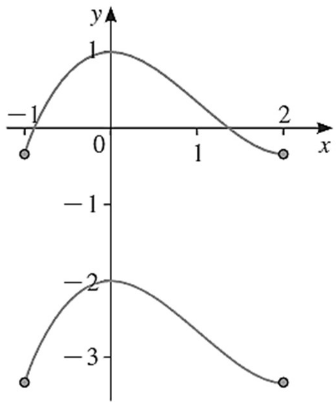
Soluções

1. $G(x)$ e $H(x)$
2.
   2.1. $-\cos x$
   2.2. Por exemplo, $-\cos x + 2$
3. $g(x) = 3x + 2$ e $h(x) = 3x$
4. $F_1(x) = e^x + 1$, $F_2(x) = e^x + 2$ e $F_3(x) = e^x + 3$
5.

5.1.



5.2.



6.

6.1.

$$F'(x) = \left(\frac{3x+1}{x}\right)' = \frac{3x-(3x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}\text{, logo, } F \text{ é primitiva de } f.$$

$$G'(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)' = \frac{x-(x+1)}{x^2} - \frac{1}{x^2}\text{, logo, } G \text{ é primitiva de } f.$$

6.2.

Como F e G são primitivas de uma mesma função f, a sua diferença é constante:

$$F(x) - G(x) = \frac{3x+1}{x} - \frac{x+1}{x} = \frac{3x+1-x-1}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$

7.

$$F'(x) = (ke^{3x} + c)' = 3ke^{3x}\text{, pelo que } F \text{ é primitiva de } f(x) = e^{3x} \text{ para } 3k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$F(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}e^{3\times 0} + c = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3}$$