Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Derivadas das funções logarítmicas e da função de base a

1. Determine a expressão derivada das seguintes funções:

1.1. $f(x) = 10^{e^x}$

1.2. $g(x) = e^{5x} + 3^{x^2}$

1.3. $h(x) = x2^{\sqrt{x}}$

1.4. $f(x) = \ln x + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$

1.5. $g(x) = \frac{\log x}{e^{3x}}$

1.6. $h(x) = x^3 \log_2 x$

2. considere a função f real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{1 - \log x}$$

2.1. Determine o domínio de f.

2.2. Estude a função f quanto:

2.2.1. À monotonia e existência de extremos relativos.

2.2.2. Ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

3. Determine a expressão da derivada das funções:

3.1. $f(x) = \ln\left(\frac{x^3}{2x+1}\right)$

3.2. $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$

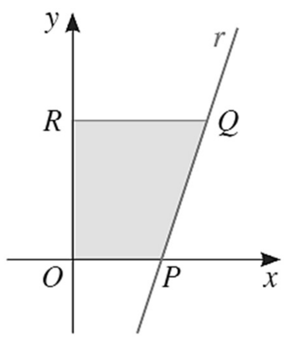
3.3. $h(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{e^{2x}}\right)$

4. Seja f a função de domínio $]1, +\infty[$, definida por

$$f(x) = x + x\ln(x - 1)$$

Na figura estão representados uma reta r e um trapézio $[OPQR]$.

- Q tem abcissa 2 e pertence ao gráfico de f (o qual não está representado na figura);
- r é tangente ao gráfico de f no ponto Q;
- P é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox;
- R pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto Q.



Sem recorrer à calculadora, determine a área do trapézio $[OPQR]$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Soluções

1.

1.1. $f'(x) = \left(10^{e^x}\right)' = \ln 10 \times e^x \times 10^{e^x}$

1.2. $g'(x) = \left(e^{5x} + 3^{x^2}\right)' = 5e^{5x} + \ln 3 \times 2x \times 3^{x^2} = 3^{x^2}\, x \ln 9 + 5e^{5x}$

1.3. $h'(x) = \left(x2^{\sqrt{x}}\right)' = 2^{\sqrt{x}} + x \times \ln 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times 2^{\sqrt{x}} = 2^{\sqrt{x}} + 2^{\sqrt{x}-1}\sqrt{x}\ln 2$

1.4.

$$f'(x) = \left(\ln x + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\right)' = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} =$$

$$= \frac{1}{x} - 3\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = \frac{1}{x} - \ln 8 \times 8^{-x}$$

1.5.

$$g'(x) = \left(\frac{\log x}{e^{3x}}\right)' = \frac{\left(\dfrac{1}{(\ln 10)x} \times e^{3x} - \log x \times 3e^{3x}\right)}{\left(e^{3}x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{3x}\left(\dfrac{1}{x\ln 10} - 3\log x\right)}{e^{6x}} = \frac{\dfrac{1}{x\ln 10} - 3\log x}{e^{3x}}$$

1.6. $h'(x) = \left(x^3 \log_2 x\right)' = 3x^2 \log_2 x - x^3 \times \dfrac{1}{x\ln 2} = 3x^2 \log_2 x - \dfrac{x^2}{\ln 2}$

2.

2.1.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}\colon 1 - \log x \neq 0 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+ \backslash \{10\}$$

$$1 - \log x = 0 \Leftrightarrow \log x = 1 \Leftrightarrow x = 10$$

2.2.

2.2.1.

$$f'(x) = \frac{1 - \log x + \dfrac{x}{x\ln 10}}{\left(1 - \log x\right)^2} = \frac{1 - \log x + \dfrac{1}{\ln 10}}{\left(1 - \log x\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{\ln 10 - \ln 10 \log x + 1}{\ln 10}}{(1 - \log x)^2} = \frac{\ln 10 - \ln 10 \log x + 1}{\ln 10\left(1 - \log x\right)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln 10 - \ln 10 \log x + 1 = 0 \wedge \ln 10 (1 - \log x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln 10 \log x = \ln 10 + 1 \wedge \log x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log x = \frac{\ln 10 + 1}{\ln 10} \wedge x \neq 10 \Leftrightarrow x = 10^{\frac{1 + \ln 10}{\ln 10}} \wedge x \neq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 10^{\frac{1}{\ln 10} + 1} + 1 \wedge x \neq 10 \Leftrightarrow x = 10^{\frac{1}{\ln 10}} \times 10 \wedge x \neq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 10^{\log e} \times 10 \wedge x \neq 10 \Leftrightarrow x = e \times 10 \wedge x \neq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 10e \wedge x \neq 10$$

	0		10		$10e$	$+\infty$
$f'(x)$	n.d.	$+$	n.d.	$+$	0	$-$
f		$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

f é crescente em $]0, 10[$ e em $]10, 10e]$.

f é decrescente em $[10e, +\infty[$.

Máximo relativo:

$$f(10e) = -\frac{10e}{\log e} \text{ em } x = 10e$$

2.2.2.

$$f''(x) = \left(\frac{\ln 10 - \ln 10 \log x + 1}{\ln 10 (1 - \log x)^2}\right)' =$$

$$= \frac{\left(-\ln 10 \times \frac{1}{x}\right) \times \ln 10 (1 - \log x)^2 - (\ln 10 + 1 - \ln 10 \log x) \times \ln 10 \times 2 \times (1 - \log x) \times \left(-\frac{1}{x}\right)}{\left[\ln 10 (1 - \log x)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{-\ln 10 (1 - \log x)^2 + (\ln 10 + 1 - \ln 10 \log x) \times 2(1 - \log x)}{x\left[\ln 10 (1 - \log x)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{(1 - \log x)(-\ln 10 + \ln 10 \log x + 2\ln 10 + 2 - 2\ln 10 \log x)}{x\left[\ln 10 (1 - \log x)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{(1 - \log x)(\ln 10 + 2 - \ln 10 \log x)}{x\left[\ln 10 (1 - \log x)^2\right]^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \log x)(\ln 10 + 2 - \ln 10 \log x) = 0 \wedge \left[x \ln 10 (1 - \log x)^2\right]^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \log x = 0 \vee \ln 10 + 2 - \ln 10 \log x = 0) \wedge x \ln 10 \times (1 - \log x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log x = 1 \vee \ln 10 \log x = 2 + \ln 10) \wedge 1 - \log x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log x = 1 \vee \log x = \frac{2 + \ln 10}{\ln 10}\right) \wedge \log x \neq 1 \Leftrightarrow x = 10^{\frac{2 + \ln 10}{\ln 10}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 10^{\frac{2}{\ln 10} + 1} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{2}{\ln 10}} \times 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 10^{2\log e} \times 10 \Leftrightarrow x = \log^{e^2} \times 10 \Leftrightarrow x = 10e^2$$

	0		10		$10e^2$	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	$+$	n.d.	$-$	$-$	$+$
f	n.d.	$\cup$	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

f tem a concavidade voltada para cima em $]0, 10[$ e em $]10e^2, +\infty[$.

f tem a concavidade voltada para baixo em $]10, 10e^2[$.

f tem um ponto de inflexão de abcissa $10e^2$.

3.

3.1.

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{x^3}{2x + 1}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x^3}{2x+1}\right)'}{\frac{x^3}{2x+1}} = \frac{\frac{3x^2(2x + 1) - x^3 \times 2}{(2x + 1)^2}}{\frac{x^3}{2x + 1}} =$$

$$= \frac{6x^3 + 3x^2 - 2x^3}{x^3(2x + 1)} = \frac{4x^3 + 3x^2}{x^3(2x + 1)} = \frac{4x + 3}{2x^2 + x}$$

3.2.

$$g'(x) = (\log_3(x^2 - 1))' = \frac{2x}{\ln 3 \times \left(x^2 - 1\right)}$$

3.3.

$$h'(x) = \left[\log\left(\frac{x^2 - 1}{e^{2x}}\right)\right]' = \frac{\left(\frac{x^2-1}{e^{2x}}\right)'}{\ln 10\left(\frac{x^2-1}{e^{2x}}\right)} = \frac{\frac{2x \times e^{2x} - 2e^{2x}\left(x^2-1\right)}{e^{4x}}}{\ln 10\left(\frac{x^2-1}{e^{2x}}\right)} =$$

$$= \frac{e^{2x}(2x - 2x^2 + 2)e^{2x}}{(x^2 - 1)\ln 10 \times e^{4x}} = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{(x^2 - 1)\ln 10}$$

4.

O ponto Q pertence ao gráfico de f e tem abcissa 2, logo,

$f(2) = 2 + 2\ln(2 - 1) = 2 + 2\ln(1) = 2 + 2 \times 0 = 2$ é a ordenada de Q.

$$f'(x) = \left(x + x\ln(x - 1)\right)' = 1 + \ln(x - 1) + x \times \frac{1}{x - 1} =$$

$$= 1 + \ln(x - 1) + \frac{x}{x - 1}$$

Calculando o valor do declive da reta r:

$$m = f'(2) = 1 + \ln(2 - 1) + \frac{2}{2 - 1} = 1 + \ln 1 + 2 = 3$$

$$y = mx + b$$

$$2 = 3 \times 2 + b \Leftrightarrow 2 = 6 + b \Leftrightarrow 2 - 6 = b \Leftrightarrow -4 = b$$

A equação da reta r é: $y = 3x - 4$.

Determine-se a abcissa do ponto P:

$$y = 3x - 4 \wedge y = 0 \Leftrightarrow 0 = 3x - 4 \Leftrightarrow \frac{4}{3} = x$$

Logo, a área do trapézio é:

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{RQ} + \overline{OP}}{2} \times \overline{OR} = \frac{2 + \frac{4}{3}}{2} \times 2 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$