Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Derivada, monotonia e extremos de funções

1. Justifique que a função definida por $f(x) = x^2 - 3x$ é estritamente crescente no intervalo $]2, 4[$.

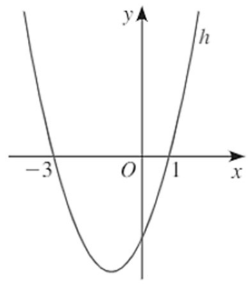
2. A partir do estudo do sinal da derivada, indique os intervalos de monotonia das seguintes funções reais de variável real.

2.1. $f(x) = x^2 + x$

2.2. $g(x) = \sqrt{x}$

2.3. $h(x) = x^3 + x$

3. Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função quadrática h, com zeros -3 e 1.



3.1. Sendo h a derivada de uma função f, indique os intervalos de monotonia de f.

3.2. Justifique que $f(-3)$ é o máximo das funções $f_{]-4,-3]}$ e $f_{[-3,-2[}$.

3.3. Determine o conjunto solução da condição $h(x) \times h'(x) \geq 0$.

4. A partir do estudo do sinal da derivada, indique os intervalos de monotonia e, caso existam, os extremos relativos e absolutos das funções reais de variável real, definidas por:

4.1. $f(x) = x^3 - 6x$

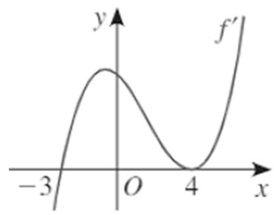
4.2. $g(x) = -x + \frac{1}{x-2}$

4.3. $h(x) = \sqrt{x} - x$

4.4. $i(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

4.5. $j(x) = \frac{4}{x^2+2}$

5. Na figura está representada, em referencial ortogonal, parte do gráfico da derivada de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.
Refira, justificando, qual é o valor lógico das seguintes proposições:



5.1. $f(-3)$ é um máximo relativo de f.

5.2. A função f é decrescente em $]-3, 4[$.

5.3. A função f admite um extremo relativo em 4.

5.4. Se $f(5) = 7$, então $f(6) > 7$.

6. Considere a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x^3 + ax + b$$

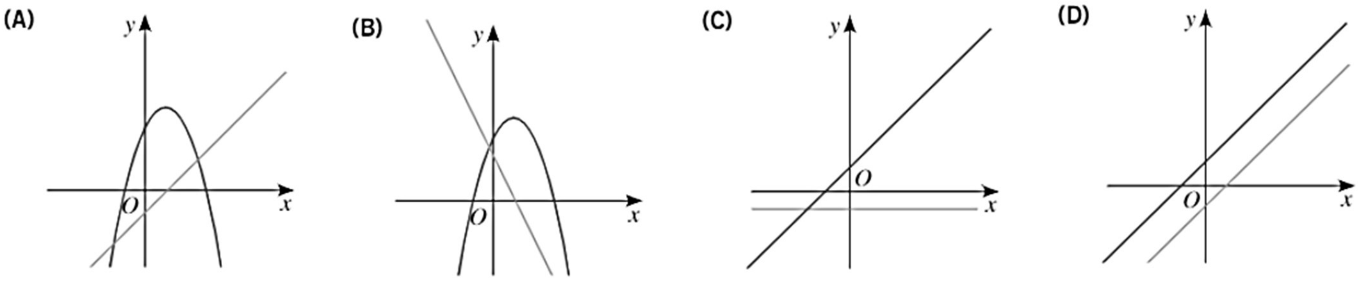
com a e b reais.
Determine, em cada alínea, os valores de a e b sabendo que:

6.1. A função f assume o mínio relativo 5 em $x = 1$.

6.2. A função f é crescente.

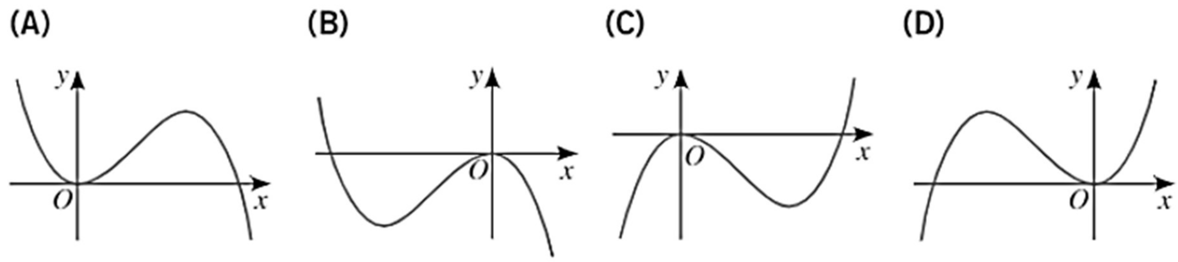
6.3. 1 é máximo relativo de f em $x = -2$.

7. Em qual das seguintes figuras estão representadas partes dos gráficos de uma função e respetiva derivada?

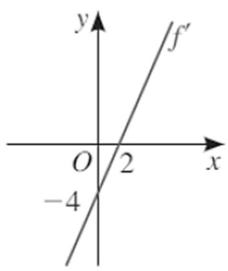


8. Uma certa função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, é diferenciável e a sua derivada é definida por $f'(x) = x^2 - 4x$.

Qual dos gráficos seguintes pode representar a função f?



9. Na figura está representada uma função afim, derivada de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.
Tal como a figura sugere, a reta passa pelos pontos de coordenadas $(0, -4)$ e $(2, 0)$.



9.1. Estude a monotonia e a existência de extremos relativos de f.

9.2. Sabendo que $f(0) = 1$, determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

Soluções

1.

$\forall x \in]2, 4[, f'(x) = 2x - 3 > 0$ ($\forall x \in]2, 4[, f'(x) \geqslant 1$), então, f é estritamente crescente em $]2, 4[$.

2.

2.1.

$f'(x) = 2x + 1$; $D_{f'} = \mathbb{R}$

$2x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{1}{2}$

$2x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$

A função f é decrescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ e crescente em $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

2.2.

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $D_{g'} = \mathbb{R}^+$

Como $\frac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, a função g é crescente em $[0, +\infty[$.

2.3.

$h'(x) = 3x^2 + 1$; $D_{h'} = \mathbb{R}$

Como $3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então, a função h é crescente em $\mathbb{R}$.

3.

3.1.

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Assim, a função f é crescente nos intervalos $]-\infty, -3]$ e $[1, +\infty[$ e decrescente no intervalo $[-3, 1]$.

3.2.

Como f é crescente em $]-\infty, -3]$ e decrescente em $[-3, 1]$, assume em -3 um máximo relativo.

3.3.

Como $\frac{-3+1}{2} = -1$, então, a abcissa do vértice da parábola que representa h é igual a -1 . Portanto, o gráfico de h' é uma reta de zero em $x = -1$ e de declive positivo (por observação da monotonia de h) .

Assim:

x	$-\infty$	-3		-1		1	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$h'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$h(x) \times h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

C.S. $= [-3, -1] \cup [1, +\infty[$

4.

4.1.

$f'(x) = 3x^2 - 6\ ;\ D_{f'} = \mathbb{R}$

$3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Crescente em $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right]$ e em $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$; e decrescente em $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

Máximo relativo em $x = -\sqrt{2}$: $f\left(-\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}$

Mínimo relativo em $x = \sqrt{2}$: $f\left(\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2}$

4.2.

$$g'(x) = \left(-x + \frac{1}{x-2}\right)' = -1 - \frac{1}{(x-2)^2} < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$D_{g'} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	n.d.	$-$
g	$\searrow$	n.d.	$\searrow$

Decrescente em $]-\infty, 2[$ e em $]2, +\infty[$; logo, não admite extremos relativos.

4.3.

$$h'(x) = \left(\sqrt{x} - x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\ ;\ D_{h'} = \mathbb{R}^+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \underset{x \in \mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{4}$$

x	0		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$h'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$
h	0	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Crescente em $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ e decrescente em $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

Máximo absoluto em $x = \frac{1}{4}$: $h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

Mínimo relativo em $x = 0$: $h(0) = 0$ (Não há mínimo absoluto, pois $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$).

4.4.

$$i'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 4}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\ ;\ D_{f'} = \mathbb{R}$$

$i'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, pois $\sqrt{x^2 + 4} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$i'(x)$	$-$	0	$+$
i	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Crescente em $[0, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 0]$.

Mínimo absoluto em $x = 0$: $i(0) = 2$

4.5.

$$j'(x) = \left(\frac{4}{x^2+2}\right)' = \frac{8x}{(x^2+2)^2}\ ;\ D_{j'} = \mathbb{R}$$

$j'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, pois $(x^2+2)^2 > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$j'(x)$	$+$	0	$-$
j	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.

Máximo absoluto em $x = 0$: $j(0) = 2$

5.

Por observação do gráfico de f', tem-se:

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	$f(4)$	$\nearrow$

5.1. Falsidade, porque $f(-3)$ é um mínimo relativo de f.

5.2. Falsidade, porque $f'(x) > 0$ em $]-3, 4[$; logo, f é crescente neste intervalo.

5.3. Falsidade, porque a função f é crescente em $]-3, +\infty[$.

5.4. Verdade, porque f é crescente em $[-3, +\infty[$; logo, $f(6) > f(5)$, ou seja, $f(6) > 7$.

6.

6.1.

$f'(x) = 3x^2 + a$ e $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + a = 0 \Leftrightarrow a = -3$

$f(1) = 5 \Leftrightarrow 1 + a + b = 5 \Leftrightarrow 1 - 3 + b = 5 \Leftrightarrow b = 7$

Então, $a = -3$ e $b = 7$.

6.2. Atendendo à derivada, $a \geqslant 0$ e b qualquer.

6.3.

$f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12 + a = 0 \Leftrightarrow a = -12$

$f(-2) = 1 \Leftrightarrow -8 - 2a + b = 1 \Leftrightarrow -8 + 24 + b = 1 \Leftrightarrow b = -15$

Então, $a = -12$ e $b = -15$.

7.

Se a função for afim, o gráfico da respetiva derivada é uma reta horizontal, pois a derivada de uma função afim é uma função constante. Logo, está excluída a opção (D).

Não pode ser a opção (C) porque, neste caso, a função derivada é uma constante negativa, mas o declive da reta que representa graficamente a função é positivo.

A opção (A) não é a correta, pois a parábola tem concavidade voltada para baixo, ou seja, é crescente no intervalo $]-\infty, x[$, sendo x a abcissa do seu vértice, mas a sua derivada é negativa nesse mesmo intervalo.

A opção correta é a (B).

8.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

Assim:

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

A opção correta é a (C).

9.

9.1.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

Crescente em $[2, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 2]$.

Mínimo relativo em $x = 2$.

9.2. $y = f(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = -4x + 1$