

Nome do aluno

Nº

Data

/ / 20

**Operar com derivadas**

1. A função  $f$  real de variável real, definida por  $f(x) = 2|x - 3|$ , não diferenciável num ponto do seu domínio. Qual?

2. Sejam  $a$  e  $b$  reais e considere a função  $f$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4ax & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Determine os valores de  $a$  e de  $b$  de forma que  $f$  seja diferenciável em 1.

3. Caracterize as funções derivadas das funções seguintes e, para ca função derivada, determine os seus zeros, se existirem.

3.1.  $f(x) = -4 + x$

3.2.  $f(x) = x^3 + x^2 - \frac{1}{2}$

3.3.  $f(x) = x + \sqrt{x}$

3.4.  $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

4. Seja  $g$  a função real variável real, definida por:

$$g(x) = x + \frac{1}{x}$$

4.1. Caracterize a função  $g'$ .

4.2. Determine  $g'(2)$  e escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de  $g$  em  $x = 2$ .

4.3. Resolva, em  $\mathbb{R}$ ,  $g'(x) \leq 0$ .

5. Seja  $f$  uma função diferenciável em 1, tal que  $f'(1) = -2$  e  $f(1) = 3$ .

5.1. Calcule  $g'(1)$  sendo:

5.1.1.  $g(x) = f(x) + \sqrt{x}$

5.1.2.  $g(x) = \frac{1}{x} + f(x)$

5.2. Determine:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{f(x) \times (1 - x)}$$

6. Considere as funções  $f$  e  $g$  reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = x^3 \quad e \quad g(x) = \sqrt{x} + 2$$

Caracterize:

6.1.  $(f + g)'$

6.2.  $(fg)'$

6.3.  $(2f - g)'$

7. Obtenha uma expressão para a derivada de:

7.1.  $2x^2$

7.2.  $-\frac{x^3-4x}{3}$

7.3.  $\frac{2x-1}{1-x}$

7.4.  $\frac{2x^3}{x+2}$

7.5.  $\frac{x}{1-\sqrt{x}}$

7.6.  $\frac{3x}{(2-x)^2}$

8. Seja  $k$  um número real. Considere a função  $g$  real de variável real, definida por:

$$g(x) = kx^3 + 6x^2 - kx - 18$$

Determine o valor de  $k$  sabendo que as retas tangentes ao gráfico de  $g$  nos pontos de abscissas 1 e 2 são paralelas.

9. Caracterize a função derivada de cada uma das funções seguintes e calcule os zeros de  $f'$ , caso existam:

9.1.  $f(x) = (2x - 1)\sqrt{x}$

9.3.  $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$

9.2.  $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)(1 - x^2)$

10. Considere uma função real de variável real  $f$ , diferenciável num ponto  $a \in D_f$ , com  $f(a) \neq 0$ .

Mostre que a função  $\frac{1}{f}$  é diferenciável em  $a$  e  $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{[f(a)]^2}$ .

11. Considere a função  $g$  real de variável real, definida por:

$$g(x) = \frac{3x - 1}{x - 1}$$

Determine as coordenadas de um ponto no 1º quadrante em que a reta tangente ao gráfico de  $g$ , que passe por esse ponto, seja:

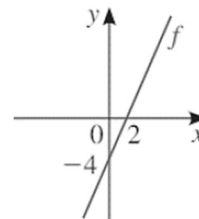
11.1. Paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

11.2. Perpendicular à reta de equação  $y = 2x + 1$ .

12. A figura reproduz a reta que representa graficamente a função  $f$ .

Seja  $g$  a função definida por  $g(x) = \frac{1-x}{x^3}$ .

Determine  $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$ .



13. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad e \quad g(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

13.1. Caracterize a função  $g \circ f$ .

13.2. Obtenha a expressão analítica de  $(g \circ f)'$  usando dois processos distintos:

13.2.1. Derivada do quociente;

13.2.2. Derivada da função composta.

14. Considere a função  $f$ , definida em  $\mathbb{R}$ , por:

$$f(x) = x^5 - 5x$$

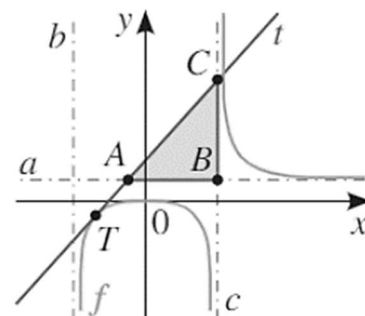
- 14.1. Sejam  $A$  e  $B$  os pontos do gráfico de  $f$  de abscissas  $-1$  e  $2$ , respectivamente. Determine o declive da reta secante ao gráfico de  $f$  nos pontos  $A$  e  $B$ .
- 14.2. Verifique a existência de, pelo menos, um ponto  $C$  do gráfico de  $f$ , com abscissa compreendida entre  $-1$  e  $2$ , em que a reta tangente tem declive igual ao da reta  $AB$  e determine a abscissa de  $C$ .

15. Na figura estão representados:

- Parte do gráfico da função  $f$  de domínio  $] -3, +\infty[$ , tal que:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 9}$$

- A reta  $t$ , tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $T$  de abscissa  $x = -2$ ;
- As retas  $a$ ,  $b$  e  $c$ , assíntotas do gráfico de  $f$ ;
- Os pontos  $A$  e  $C$ , pontos de interseção de  $t$  com as retas  $a$  e  $c$ , respectivamente;
- O ponto  $B$ , ponto de interseção das retas  $a$  e  $c$ .



Determine a área do triângulo  $[ABC]$ .

## Soluções

1.

Tem-se que  $f(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } x \geq 3 \\ -2x + 6 & \text{se } x < 3 \end{cases}$ , logo:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2x + 6}{x - 3} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 6}{x - 3} = 2$$

Portanto,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$  não existe e, por isso,  $f$  não é diferenciável em  $x = 3$ .

2.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 4ax) = 1 + 4a = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{x} = b$$

Como  $f$  é diferenciável em  $x = 1$ , tem-se que  $f$  é contínua em  $x = 1$  e, sendo assim,  $b = 1 + 4a$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 + 4a(1+h) - 1 - 4a}{h} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h^2 + 2h + 4ah}{h} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (h + 2 + 4a) = 2 + 4a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{b}{1+h} - 1 - 4a}{h} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b - 1 - h - 4a - 4ah}{h(1+h)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 4a - 1 - h - 4a - 4ah}{h(1+h)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-h(1+4a)}{h(1+h)} = -1 - 4a$$

Então:

$$\begin{cases} 2 + 4a = -1 - 4a \\ 1 + 4a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{8} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, os valores de  $a$  e de  $b$  são, respectivamente,  $-\frac{3}{8}$  e  $-\frac{1}{2}$ .

3.

3.1.

$$f'(x) = (-4)' + (x)' = 0 + 1 = 1; D_{f'} = \mathbb{R}$$

$f'$  não tem zeros.

3.2.

$$f'(x) = (x^3)' + (x^2)' + \left(-\frac{1}{2}\right)' = 3x^2 + 2x + 0 = 3x^2 + 2x; D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{2}{3}$$

Os zeros de  $f'$  são  $0$  e  $-\frac{2}{3}$ .

3.3.

$$f'(x) = (x)' + (\sqrt{x})' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}; D_{f'} = \mathbb{R}^+$$

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$f'$  não tem zeros.

3.4.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Não existe  $f'(1)$ , pois  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 5 - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 6}{x - 1} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

O zero de  $f'$  é o 0.

4.

4.1.

$$g'(x) \underset{\text{Tarefa 2}}{=} (x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2}; D_{g'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

4.2.

$$g'(2) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$$

Equação reduzida da reta tangente ao gráfico de  $g$  em  $x = 2$ :

$$y = g'(2)(x - 2) + g(2) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}(x - 2) + \frac{5}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + 1$$

4.3.

$$g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$x$	$-\infty$	$-1$		$0$		$1$	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$x^2$	$+$	$+$	$+$	$0$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2 - 1}{x^2}$	$+$	$0$	$-$	n.d.	$-$	$0$	$+$

$$\text{C.S.} = [-1, 1] \setminus \{0\}$$

5.

5.1.

5.1.1.

$$g'(x) = f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(1) = f'(1) + \frac{1}{2\sqrt{1}} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

## 5.1.2.

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + f'(x)$$

$$g'(1) = -\frac{1}{1^2} + f'(1) = -1 - 2 = -3$$

5.2.  $f'(0) = -2 < 0$ ; portanto, não é crescente em  $\mathbb{R}$ .

6.

6.1.

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}; D_{(f+g)'} = \mathbb{R}^+$$

6.2.

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) = 3x^2(\sqrt{x} + 2) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x^3 = \\ &= \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} + 3x^{\frac{5}{2}} + 6x^2 = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} + 6x^2 = \frac{7}{2}\sqrt{x^5} + 6x^2 \\ D_{(fg)'} &= \mathbb{R}_0^+ \end{aligned}$$

6.3.

$$(2f - g)'(x) = 2f'(x) - g'(x) = 6x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}; D_{(2f-g)'} = \mathbb{R}^+$$

7.

7.1.

$$(2x^2)' = 2(x^2)' = 4x$$

7.2.

$$\left(-\frac{x^3 - 4x}{3}\right)' = -\frac{1}{3}(x^3 - 4x)' = -\frac{1}{3}(3x^2 - 4) = -x^2 + \frac{4}{3}$$

7.3.

$$\left(\frac{2x-1}{1-x}\right)' = \frac{(2x-1)'(1-x) - (2x-1)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{2-2x+2x-1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

7.4.

$$\left(\frac{2x^3}{x+2}\right)' = \frac{(2x^3)'(x+2) - (2x^3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{6x^3 + 12x^2 - 2x^3}{(x+2)^2} = \frac{4x^3 + 12x^2}{(x+2)^2}$$

7.5.

$$\left(\frac{x}{1-\sqrt{x}}\right)' = \frac{(x)'(1-\sqrt{x}) - (x)(1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1-\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{2\sqrt{x} - 2x + x}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2} = \frac{-x + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$$

7.6.

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x}{(2-x)^2}\right)' &= \frac{(3x)'(2-x)^2 - (3x)((2-x)^2)'}{[(2-x)^2]^2} = \frac{3(2-x)^2 + (3x) \times 2 \times (2-x)}{(2-x)^4} \\ &= \frac{(2-x)(6-3x+6x)}{(2-x)^4} = \frac{6+3x}{(2-x)^3} \end{aligned}$$

8.

$$g'(x) = 3kx^2 + 12x - k$$

$$g'(1) = 2k + 12 \text{ e } g'(2) = 11k + 24$$

Como as retas tangentes são paralelas, então:

$$2k + 12 = 11k + 24 \Leftrightarrow 9k = -12 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}$$

9.

9.1.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 1)' \times \sqrt{x} + (2x - 1) \times (\sqrt{x})' = \\ &= 2\sqrt{x} + (2x - 1) \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{2x - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x - 1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R}^+$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x - 1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow 6x - 1 = 0 \wedge 2\sqrt{x} \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$\text{Zero de } f': \frac{1}{6}$$

9.2.

$$f'(x) = \left(-x^3 + 2x - \frac{1}{x}\right)' = -3x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = -\frac{3x^4 - 2x^2 - 1}{x^2}$$

Alternativa:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x - \frac{1}{x}\right)'(1 - x^2) + \left(x - \frac{1}{x}\right)(1 - x^2)' = \\ &= \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)(1 - x^2) + \left(x - \frac{1}{x}\right)(-2x) = 1 - x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 - 2x^2 + 2 = \\ &= -3x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{3x^4 - 2x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -3x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow_{x^2=y} \\ &\Leftrightarrow -3y^2 + 2y + 1 = 0 \wedge y \neq 0 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \vee x^2 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Zeros de } f': -1 \text{ e } 1$$

9.3.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 4}{x}\right)' = \left(x + \frac{4}{x}\right)' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}; D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

$$\text{Zeros de } f': -2 \text{ e } 2$$

10.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(a) - f(x)}{f(x)f(a)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) - f(x)}{f(x)f(a)(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{1}{f(x)f(a)} \times \frac{f(a) - f(x)}{(x - a)} \right] \\ &= -\frac{1}{[f(a)]^2} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\frac{f'(a)}{[f(a)]^2} \end{aligned}$$

11.

$$g'(x) = \frac{(3x-1)'(x-1) - (3x-1)(x-1)'}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

11.1.

Se é paralela à bissetriz dos quadrantes pares, então, tem declive  $-1$ .

Tem-se que:

$$-\frac{2}{(x-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} \vee x = 1 + \sqrt{2}$$

Como o ponto pertence ao 1.º quadrante, a sua abcissa é positiva; então, as suas coordenadas são  $(1 + \sqrt{2}, g(1 + \sqrt{2}))$ , isto é,  $(1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} + 3)$ .

11.2.

Se é perpendicular à reta de equação  $y = 2x + 1$ , então, tem declive  $-\frac{1}{2}$ .

Tem-se que:

$$-\frac{2}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x-1 = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

Como o ponto pertence ao 1.º quadrante, então,  $x = 3$ . Substituindo em  $g$ , obtém-se:

$$g(3) = \frac{3 \times 3 - 1}{3 - 1} = 4$$

As coordenadas do ponto são  $(3, 4)$ .

12.

Calcule-se a função derivada de  $g$  em  $x = 2$ :

$$g'(x) = \left(\frac{1-x}{x^3}\right)' = \frac{(1-x)'x^3 - (1-x)(x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{-x^3 - 3x^2 + 3x^3}{x^6} = \frac{2x-3}{x^4}$$

$$g'(2) = \frac{2 \times 2 - 3}{2^4} = \frac{1}{16}$$

Por observação do gráfico, tem-se que  $f(2) = 0$ .

Como o declive de  $f$  é  $\frac{-4-0}{0-2} = 2$ ,  $f'(2) = 2$ .

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2)g(2) - f(2)g'(2)}{[g(2)]^2} = \frac{2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) - 0 \times \frac{1}{16}}{\left(-\frac{1}{8}\right)^2} = -16$$

13.

13.1.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}; D_f = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$$



## 13.2.

## 13.2.1.

$$(g \circ f)'(x) = \left( \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right)' = \frac{(1 + \sqrt{x})'(1 - \sqrt{x}) - (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})'}{(1 - \sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{\frac{1 - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2}$$

## 13.2.2.

$$g'(x) = \left( \frac{1 + x}{1 - x} \right)' = \frac{2}{(1 - x)^2}$$

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'[f(x)] = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times g'(\sqrt{x}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{2}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2}$$

## 14.

## 14.1.

Como os pontos  $A$  e  $B$  pertencem ao gráfico de  $f$ , tem-se:

$$f(-1) = (-1)^5 - 5 \times (-1) = -1 + 5 = 4$$

$$f(2) = 2^5 - 5 \times 2 = 32 - 10 = 22$$

Então, as coordenadas de  $A$  e  $B$  são, respectivamente,  $(-1, 4)$  e  $(2, 22)$ .

Logo, o declive da reta  $AB$  é igual a  $\frac{22 - 4}{2 - (-1)} = 6$ .

## 14.2.

$$f'(x) = 6 \Leftrightarrow (x^5 - 5x)' = 6 \Leftrightarrow 5x^4 - 5 = 6 \Leftrightarrow x^4 = \frac{11}{5} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{11}{5}}$$

Como a abscissa de  $C$  tem de pertencer ao intervalo  $] -1, 2[$ , tem-se

$$x = \sqrt[4]{\frac{11}{5}}, \text{ pois } \sqrt[4]{11} < \sqrt[4]{5} < 2\sqrt[4]{5}.$$

$$\text{Portanto, a abscissa do ponto } C \text{ é } x = \sqrt[4]{\frac{11}{5}} = \frac{\sqrt[4]{11 \times 5^3}}{5} = \frac{\sqrt[4]{1375}}{5}.$$

## 15.

$$\text{Tem-se } f'(x) = \left( \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 9} \right)' = -\frac{34x}{(x^2 - 9)^2}.$$

Uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $x = -2$ :

$$y = f'(-2)(x + 2) + f(2) \Leftrightarrow y = \left( -\frac{34(-2)}{((-2)^2 - 9)^2} \right)(x + 2) + \frac{2(-2)^2 - 1}{(-2)^2 - 9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{68}{25}(x + 2) - \frac{7}{5} \Leftrightarrow y = \frac{68}{25}x + \frac{101}{25}$$

Assíntotas do gráfico de  $f$ :

$$D_f = ]-3, +\infty[$$

As retas de equação  $x = -3$  e  $x = -3$  são assíntotas verticais ao gráfico da função  $f$ .

Calcule-se o limite em  $+\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 9} = 2$$

Logo, a reta de equação  $y = 2$  é assíntota horizontal ao gráfico da função  $f$ .

Coordenadas de  $A$  :

$$\begin{cases} y = \frac{68}{25}x + \frac{101}{25} \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{68}{25}x + \frac{101}{25} = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = 2 \end{cases}$$

Então,  $A\left(-\frac{3}{4}, 2\right)$ .

O ponto  $B$  é a interseção das assíntotas  $a$  e  $c$ ; logo,  $B(3, 2)$ .

Coordenadas de  $C$  :

$$\begin{cases} y = \frac{68}{25}x + \frac{101}{25} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{68}{25} \times 3 + \frac{101}{25} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{61}{5} \\ x = 3 \end{cases}$$

Então,  $C\left(3, \frac{61}{5}\right)$ .

A área do triângulo retângulo  $[ABC]$  é:

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\left(3 - \left(-\frac{3}{4}\right)\right) \times \left(\frac{61}{5} - 2\right)}{2} = \\ &= \frac{\frac{15}{4} \times \frac{51}{5}}{2} = \frac{765}{40} = \frac{153}{8} \text{ u. a.} \end{aligned}$$