Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Função derivada

1. Utilizando a definição de derivada num ponto, determine a expressão da função derivada das funções seguintes, indicando o respetivo domínio.

   1.1. $f(x) = 3x + 2$

   1.2. $f(x) = 2 - x^2$

   1.3. $f(x) = \sqrt{x - 3}$

   1.4. $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, e a sua derivada, f', definida por:

$$f'(x) = \frac{1}{x - 2}$$

Indique, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação: «f é diferenciável em 0».

3. Considere a função f, real de variável real definida por:

$$f(x) = 5x - x^2$$

Determine a abcissa do ponto do gráfico de f em que a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

4. Seja k um número real e considere a função real de variável real g definida por:

$$g(x) = x^2 + kx + 2$$

Determine $g'(x)$ por meio de uma expressão analítica e determine k de forma que $g'(-1) = 1$.

5. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = 2x^2 - 2x$$

   5.1. Mostre que:

$$f'(x) = 2x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

   5.2. Calcule $f'(0)$ e conclua que f não é crescente em $\mathbb{R}$.

6. Dada uma função g real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, em que se sabe que a derivada de g é dada por:

$$g'(x) = 1 - x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

   6.1. Justifique que g é contínua em 2.

   6.2. Sabe-se que $g(2) = 1$. Determine a equação reduzida da reta normal (perpendicular) à reta tangente a g em 2.

7. Seja f a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x \geq 0 \\ x+1 & se\ x0 \end{cases}$$

Justifique que f não é contínua em 0. O que conclui acerca da diferenciabilidade em 0?

8. Considere a função f real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & se\ x \geq 1 \\ x^3 & se\ x < 1 \end{cases}$$

Averigue se f é diferenciável em 1.

Soluções

1.

1.1.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x_0 + h) + 2 - 3x_0 - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x_0 + 3h - 3x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = 3$$

Logo, $f'(x) = 3$ e $D_{f'} = \mathbb{R}$.

1.2.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 - (x_0 + h)^2 - 2 + x_0^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 - x_0^2 - 2x_0h - h^2 - 2 + x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2x_0h - h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (-2x_0 - h) = -2x_0$$

Logo, $f'(x) = -2x$ e $D_{f'} = \mathbb{R}$.

1.3.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x_0 + h) - 3} - \sqrt{x_0 - 3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{(x_0 + h) - 3} - \sqrt{x_0 - 3}\right)\left(\sqrt{(x_0 + h) - 3} + \sqrt{x_0 - 3}\right)}{h\left(\sqrt{(x_0 + h) - 3} + \sqrt{x_0 - 3}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0 + h - 3 - x_0 + 3}{h\left(\sqrt{(x_0 + h) - 3} + \sqrt{x_0 - 3}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{(x_0 + h) - 3} + \sqrt{x_0 - 3}} = \frac{1}{\sqrt{x_0 - 3} + \sqrt{x_0 - 3}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0 - 3}}, \text{ com } x_0 \neq 3$$

Logo, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x - 3}}$ e $D_{f'} =]3, -\infty[$.

1.4.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2(x_0 + h)}{x_0 + h - 1} - \dfrac{2x_0}{x_0 - 1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2x_0 + 2h)(x_0 - 1) - 2x_0(x_0 + h - 1)}{h(x_0 + h - 1)(x_0 - 1)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0^2 - 2x_0 + 2hx_0 - 2h - 2x_0^2 - 2hx_0 + 2x_0}{h(x_0 + h - 1)(x_0 - 1)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2}{(x_0 + h - 1)(x_0 - 1)} = \frac{-2}{(x_0 - 1)^2}, \text{ com } x_0 \neq 1$$

Logo, $f'(x) = \dfrac{-2}{(x - 1)^2}$ e $D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2.

Falsidade, porque 0 não pertence ao domínio de f e o domínio de f', derivada de f, está contido no domínio de f.

3.

Pretende-se que a reta tangente tenha declive -1.

Determine-se a expressão da função f'.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{5x - x^2 - 5x_0 + x_0^2}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{5(x - x_0) + x_0^2 - x^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{5(x - x_0) - (x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0}(5 - x - x_0) = 5 - 2x_0$$

Logo, $f'(x) = 5 - 2x$. Assim, $f'(x) = -1 \Leftrightarrow 5 - 2x = -1 \Leftrightarrow x = 3$.

4.

$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 + k(x_0 + h) + 2 - x_0^2 - kx_0 - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 + kx_0 + kh + 2 - x_0^2 - kx_0 - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0h + h^2 + kh}{h} = \lim_{h \to 0}(2x_0 + h + k) = 2x_0 + k$$

Logo, $g'(x) = 2x + k$. Assim, $g'(-1) = 1 \Leftrightarrow -2 + k = 1 \Leftrightarrow k = 3$.

5.

5.1.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - 2(x_0 + h) - x_0^2 + 2x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - 2x_0 - 2h - x_0^2 + 2x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0h + h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \to 0}(2x_0 + h - 2) = 2x_0 - 2$$

Logo, $f'(x) = 2x - 2$ e $D_{f'} = \mathbb{R}$.

5.2. $f'(0) = -2 < 0$; portanto, não é crescente em $\mathbb{R}$.

6.

6.1.

Como $D_g = D'_g = \mathbb{R}$, a função é diferenciável em $x = 2$ e, portanto, é contínua em $x = 2$.

6.2.

Tem-se $g'(2) = 1 - 4 = -3$; logo, o declive da reta normal é $\frac{1}{3}$.

Substituindo as coordenadas do ponto $(2, 1)$:

$$1 = \frac{1}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}$$

Logo, a equação reduzida da reta é $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

7.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + 1) = 1$

Como $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$, não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ e, sendo assim, f não é contínua em $x = 0$.

Pode-se, então, concluir que f também não é diferenciável em $x = 0$, por implicação contrarrecíproca.

8.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3(1+h) - 2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3 + 3h - 3}{h} = 3$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} (3 + 3h + h^2) = 3$$

Como os limites laterais são iguais, $f'(1)$ existe e é igual a 3 .

Portanto, f é diferenciável em $x = 1$.