Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

Derivada da função exponencial

1. Determine os seguintes limites:

1.1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{5x}$

1.2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x+1}-e}{3x}$

1.3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^{5x}-1}$

1.4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}$

1.5. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1-e^{x-4}}{x^2-4x}$

1.6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x\, e^{\frac{3}{x}} - x\right)$

2. Determine uma expressão analítica da função derivada das seguintes funções:

2.1. $f(x) = e^{\frac{x}{4}}$

2.2. $g(x) = 2x^3e^{2x}$

2.3. $h(x) = \frac{e^{4x+1}}{1+x^4}$

2.4. $i(x) = e^{\frac{3x^2-1}{x}}$

2.5. $j(x) = 5e^x - 2e^{2x} + ex$

3. Considere a função h definida em $\mathbb{R}$ por:

$$h(x) = x\, e^x$$

3.1. Determine $h'(2)$ recorrendo à definição de derivada num ponto.

3.2. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa -1.

3.3. Estude a função h quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

4. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = 4e^{-x^2}$$

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto á existência de pontos de inflexão.

5. Admita que a quantidade de paracetamol existente no sangue, em mg, após administração oral de $1000\ mg$, é dada, em função do tempo t, em horas, por:

$$Q(t) = 1000(e^{-0{,}3t} - e^{-t})$$

5.1. Utilizando processos analíticos e recorrendo à calculadora apenas para efetuar cálculos numéricos, determine:

5.1.1. O instante em que a quantidade de medicamento no sangue atinge o valor máximo.

5.1.2. O instante em que a quantidade de medicamento no sangue diminui mais rapidamente.

5.2. Utilize a calculadora gráfica para determinar o intervalo de tempo em que a quantidade de paracetamol no sangue é superior a $200\ mg$. Apresente os resultados em horas e minutos arredondados às unidades, o(s) gráfico(s) visualizado(s) e as coordenadas dos pontos relevantes.

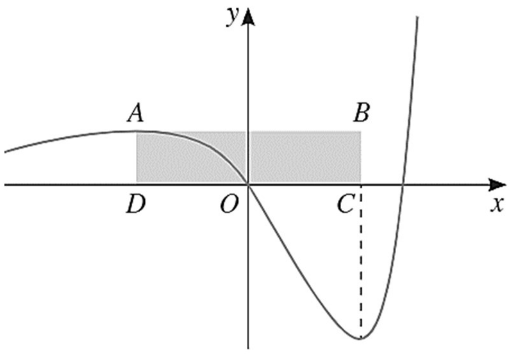
6. Considere g a função real de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = (x^2 - 2x)e^x$$

6.1. Resolva, em $\mathbb{R}$, a condição $g(x) \geq xe^x$.

6.2. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1.

6.3. Na figura estão representados parte do gráfico da função g e um retângulo $[ABCD]$.



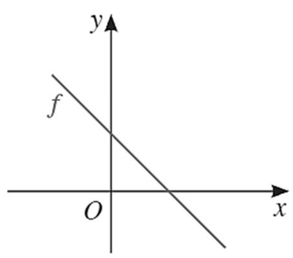
Sabe-se que:

- As ordenadas de A e de C são o máximo e o mínimo relativo de g, respetivamente;
- Os pontos C e D pertencem ao eixo Ox e o ponto A pertence ao gráfico de g.

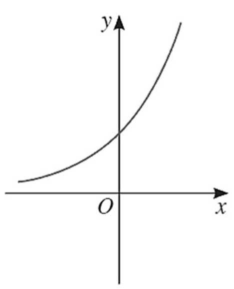
Mostre, por métodos exclusivamente analíticos, que a área do retângulo $[ABCD]$ é igual a

$$\frac{4\sqrt{2}+8}{e^{\sqrt{2}}}$$

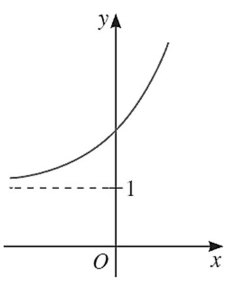
7. Na figura ao lado está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função afim f, de domínio $\mathbb{R}$.
Seja h a função definida por $h(x) = f(x) + e^x$.
Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h'', segunda derivada de h?



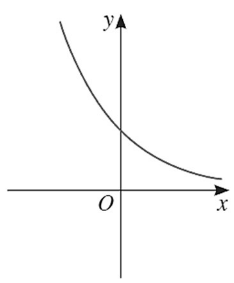
(A)



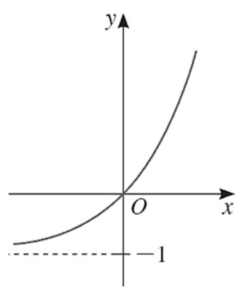
(B)



(C)



(D)



Soluções

1.

1.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{5}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{5}\times 1=\frac{1}{5}$$

1.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+1}-e}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{e}{3}\frac{e^x-1}{x}=\frac{e}{3}\times 1=\frac{e}{3}$$

1.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{5x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{5}\frac{5x}{e^{5x}-1}=\frac{1}{5}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{e^{5x}-1}{5x}}\overset{(*)}{=}$$

$$=\frac{1}{5}\times\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{e^y-1}{y}}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}=\frac{1}{5}\times 1=\frac{1}{5}$$

(*) Fazendo $y=5x$, $y\to 0$, se $x\to 0$.

1.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}\overset{(*)}{=}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\times\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{e^z-1}{z}}=\frac{3}{2}\times 1\times 1=\frac{3}{2}$$

(*) Fazendo $y=3x$, $y\to 0$, se $x\to 0$.
Fazendo $z=2x$, $z\to 0$, se $x\to 0$.

1.5.

$$\lim_{x\to 4}\frac{1-e^{x-4}}{x^2-4x}=\lim_{x\to 4}-\frac{e^{x-4}-1}{x(x-4)}=\lim_{x\to 4}\left[\left(-\frac{1}{x}\right)\times\frac{e^{x-4}-1}{x-4}\right]=$$

$$\lim_{x\to 4}\left(-\frac{1}{x}\right)\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-4}-1}{x-4}\overset{(*)}{=}-\frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=$$

$$=-\frac{1}{4}\times 1=-\frac{1}{4}$$

(*) Fazendo $y=x-4$, $y\to 0$, se $x\to 4$.

1.6.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{3}{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(e^{\frac{x}{3}}-1\right)\right]\overset{(*)}{=}\lim_{y\to 0}3\frac{e^y-1}{y}=3\times 1=3$$

(*) Fazendo $y=\frac{3}{x}\Leftrightarrow x=\frac{3}{y}$, $y\to 0$, se $x\to+\infty$.

2.

2.1.

$$f'(x)=\left(e^{\frac{x}{4}}\right)'=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}$$

2.2.

$$g'(x) = (2x^3 e^{2x})' = 6x^2 e^{2x} + 2x^3 \times 2e^{2x} = 6x^2 e^{2x} + 4x^3 e^{2x} = 2e^{2x} x^2 (2x + 3)$$

2.3.

$$h'(x) = \left(\frac{e^{4x+1}}{1 + x^4}\right)' = \frac{4e^{4x+1} \times (1 + x^4) - (e^{4x+1}) \times 4x^3}{(1 + x^4)^2} =$$

$$= \frac{(e^{4x+1})(4 + 4x^4 - 4x^3)}{(1 + x^4)^2} = \frac{4e^{4x+1}(x^4 - x^3 + 1)}{(1 + x^4)^2}$$

2.4.

$$i'(x) = \left(e^{\frac{3x^2-1}{x}}\right)' = \left(\frac{3x^2 - 1}{x}\right)' e^{\frac{3x^2-1}{x}} = \frac{6x^2 - 3x^2 + 1}{x^2} e^{\frac{3x^2-1}{x}} = \frac{3x^2 + 1}{x^2} e^{\frac{3x^2-1}{x}}$$

2.5.

$$j'(x) = (5e^x + 2e^{2x} + ex)' = 5e^x - 4e^{2x} + e$$

3.

3.1.

$$h'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{xe^x - 2e^2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(e^x + e^2) + xe^2 - 2e^2}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \left[\frac{(e^x + e^2)(x - 2)}{x - 2} + \frac{e^2(x - 2)}{x - 2}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 2} (e^x + e^2 + e^2) = 3e^2$$

3.2.

$$h'(x) = e^x + xe^x$$

$$h(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \qquad P\left(-1; -\frac{1}{e}\right)$$

$$h'(-1) = e^{-1} - e^{-1} = 0$$

$y = -\frac{1}{e}$ → equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa $x = -1$

3.3.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + xe^x = 0 \Leftrightarrow e^x (x + 1) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{(impossível em } \mathbb{R})} \lor x = -1$$

	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
h	↘	Mín.	↗

h é crescente em $[-1, +\infty[$.

h é decrescente em $]-\infty; -1]$.

Mínimo relativo: $h(-1) = -\frac{1}{e}$

4.

$$g'(x) = (4e^{-x^2})' = 4 \times (-2x)\, e^{-x^2} = -8xe^{-x^2}$$
$$g''(x) = (-8xe^{-x^2})' = -8e^{-x^2} - 8x \times (-2x)\, e^{-x^2} = -8e^{-x^2} + 16x^2\, e^{-x^2} = 8e^{-x^2}\,(2x^2 - 1)$$
$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 8e^{-x^2}\,(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

$$g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{e}} \qquad\qquad g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{e}}$$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
e em $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.
Tem dois pontos de inflexão: $I_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{4\sqrt{e}}{e}\right)$; $I_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{4\sqrt{e}}{e}\right)$

5.

5.1.

5.1.1.

$$Q'(t) = 1000(-0{,}3e^{-0{,}3t} + e^{-t})$$
$$Q'(t) = 0 \Leftrightarrow 1000(-0{,}3e^{-0{,}3t} + e^{-t}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -0{,}3e^{-0{,}3t} + e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t}\,(-0{,}3e^{0{,}7t} + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -0{,}3e^{0{,}7t} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{0{,}7t} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}7t = \ln\left(\frac{10}{3}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{0{,}7} \Leftrightarrow t \approx 1{,}71996$$

R: 1,7 horas

5.1.2.

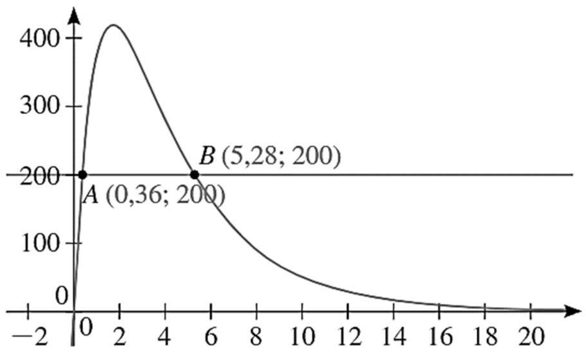
O instante em que a quantidade de medicamento no sangue diminui mais rapidamente corresponderá ao minimizante da derivada.

$$Q''(t) = 1000(-0{,}3 \times (-0{,}3)e^{-0{,}3t} - e^{-t}) \Leftrightarrow Q''(t) = 1000(0{,}09e^{-0{,}3t} - e^{-t})$$
$$Q''(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}09e^{-0{,}3t} - e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t}(0{,}09e^{0{,}7t} - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}09e^{0{,}7t} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{0{,}7t} = \frac{100}{9} \Leftrightarrow 0{,}7t = \ln\left(\frac{100}{9}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{100}{9}\right)}{0{,}7} \Leftrightarrow t \approx 3{,}4399$$

	$-\infty$	$\dfrac{\ln\left(\dfrac{100}{9}\right)}{0{,}7}$	$+\infty$
$Q''(t)$	$-$	0	$+$
$Q'(t)$	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

R: A quantidade de sangue diminui mais rapidamente às $3{,}4$ horas.

5.2.



$0{,}36 \times 60 = 21{,}6$ $\qquad$ $t \in \left]0{,}3601; 5{,}2811\right[$

$0{,}281 \times 60 = 16{,}86$

A quantidade de paracetamol no sangue é superior a 200 mg entre os 22 minutos e as 5 horas e 17 minutos, aproximadamente.

6.

6.1.

$(x^2 - 2x)\, e^x - xe^x \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x\,(x^2 - 3x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x \geqslant 0$

C.S. $= \left]-\infty, 0\right] \cup \left[3, +\infty\right[$

6.2.

$g'(x) = e^x\,(x^2 - 2)$

$g'(-1) = -\dfrac{1}{e}$

$g(-1) = \dfrac{3}{e}$

então, a equação é: $\quad y = -\dfrac{1}{e}x + \dfrac{2}{e}$

6.3.

Estudando o sinal de g', conclui-se que as abcissas de A e C são, respetivamente, $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

Assim,

$$\overline{AD} = \left(2 + 2\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}}$$

$\overline{DC} = 2\sqrt{2}$

Então, a área é igual a:

$\left(2 + 2\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}} \times 2\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2} + 8}{e^{\sqrt{2}}}$

7.

$h(x) = f(x) + e^x \qquad h'(x) = f'(x) + e^x \qquad h''(x) = f''(x) + e^x$

A função f é do tipo $f(x) = ax + b$, com a, $b \in \mathbb{R}$. Assim, $f'(x) = a$ e $f''(x) = 0$, pelo que $h''(x) = e^x$.

Resposta: (A)