Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Derivada de uma função num ponto

1. Indique, justificando, o valor lógico das afirmações seguintes:

   1.1. Uma função crescente num intervalo $[a, b]$ tem taxa média de variação positiva.

   1.2. Uma função com taxa média de variação positiva num intervalo $[a, b]$ é crescente nesse intervalo.

2. Seja a um número real e considere f a função real de variável real definida por:

$$f(x) = x^2 + ax - 1$$

Determine a de modo que a taxa média de variação de f no intervalo $[0, 2]$ seja 1.

3. Calcule a derivada em $x = 1$ das funções reais de variável real definidas por:

   3.1. $f(x) = 1 - 2x$

   3.2. $f(x) = 2x^2 + x$

   3.3. $f(x) = \frac{2}{x}$

   3.4. $f(x) = \sqrt{x}$

4. Seja k um número real e considere f a função real de variável real definida por:

$$f(x) = 2 - kx^2$$

Determine k de modo que a derivada de f em $x = -1$ seja 4.

5. Considere uma função f real de variável real definida por:

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

Determine:

   5.1. O declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos A e B de abcissa, respetivamente, -1 e 2.

   5.2. O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto C de abcissa -2.

6. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1, sendo f a função r.v.r. definida por:

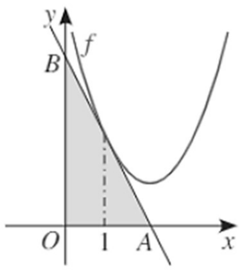
   6.1. $f(x) = 3x + 2$

   6.2. $f(x) = -x^2 + 2x$

7. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy:

   - parte do gráfico da função f, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 5$;
   - a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1;
   - o triângulo $[OBA]$, sendo A e B os pontos de interseção de r com os eixos Ox e Oy, respetivamente.

Calcule a área do triângulo $[OBA]$.



Soluções

1.

1.1.

Verdadeira, uma vez que $f(b) > f(a)$; logo, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$.

1.2. A

Falsa. Por exemplo, $f(x) = x^3 - x$ tem taxa média de variação positiva em $[-1, 2]$, no entanto, a função não é crescente neste intervalo, uma vez que $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(-1)$.

2.

$$\text{t.m.v.}_{[0,\,2]} = 1 \Leftrightarrow \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 1 \Leftrightarrow \frac{2^2 + 2a - 1 + 1}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 + a = 1 \Leftrightarrow a = -1$$

3.

3.1.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - 2(1 + h) + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 - 2 - 2h}{h} = -2$$

3.2.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(1 + h)^2 + (1 + h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 + 4h + 2h^2 + 1 + h - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5h + 2h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (5 + 2h) = 5$$

3.3.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{1 + h} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2 - 2 - 2h}{1 + h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2}{1 + h} = -2$$

3.4.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{1 + h} - 1\right)\left(\sqrt{1 + h} + 1\right)}{h\left(\sqrt{1 + h} + 1\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + h - 1}{h\left(\sqrt{1 + h} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{1 + h} + 1} = \frac{1}{2}$$

4.

$$f'(-1) = 4 \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{2 - k(-1 + h)^2 - (2 - k)}{h} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{2 - k + 2kh - kh^2 - 2 + k}{h} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} (2k - kh) = 4 \Leftrightarrow 2k = 4 \Leftrightarrow k = 2$$

5.

5.1.

$$\text{t.m.v.}_{[-1,\,2]} = \frac{f(2)-f(-1)}{2+1} = \frac{2\times 4+3\times 2-1-(2-3-1)}{2+1} = 5$$

O declive de AB é 5 .

5.2.

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2(-2+h)^2+3(-2+h)-1-(2\times 4-3\times 2-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{8-8h+2h^2-6+3h-1-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-5h+2h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(-5+2h) = -5$$

O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto C é -5 .

6.

6.1.

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(-1+h)+2+1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = 3$$

Logo, a equação da reta é do tipo $y = 3x + b$.

Tem-se que $f(-1) = -1$. Substituindo, vem $-1 = -3 + b \Leftrightarrow b = 2$.

Portanto, a equação reduzida da reta é $y = 3x + 2$.

6.2.

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-(-1+h)^2+2(-1+h)+1+2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1+2h-h^2-2+2h+1+2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^2+4h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(-h+4) = 4$$

Logo, a equação da reta é do tipo $y = 4x + b$.

Tem-se que $f(-1) = -3$. Logo, a equação reduzida da reta é $y = 4x + 1$.

7.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-4(1+h)+5-2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-4-4h+5-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2h+h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(-2+h) = -2$$

Logo, a equação da reta é do tipo $y = -2x + b$.

Tem-se que $f(1) = 2$. Substituindo, vem: $2 = -2 + b \Leftrightarrow b = 4$.

Portanto, a equação reduzida da reta é $y = -2x + 4$.

Assim, tem-se $B(0,\,4)$ e $A(2,\,0)$.

Então, $A_{[OBA]} = \dfrac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{2} = \dfrac{2\times 4}{2} = 4$ u. a.