Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Levantamento algébrico de indeterminações

1. Calcule:

1.1. $\lim(-2n^3 + n^4)$

1.2. $\lim\,(n^5 - 4n)$

1.3. $\lim\,(5^n - \pi^{n+3})$

1.4. $\lim\left(n - \sqrt{n^2+1}\right)$

1.5. $\lim\,\frac{n^3+2n-3}{n^2+5n}$

1.6. $\lim\,\frac{-3n^2+n+5}{n-2n^2}$

1.7. $\lim\,\frac{4-2n}{n^3+3}$

1.8. $\lim\frac{4^n+1}{4^{n+2}+3}$

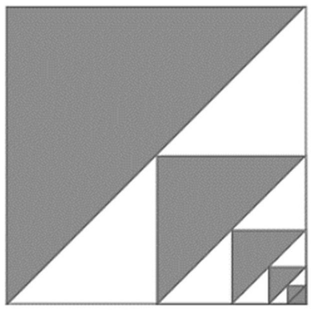
1.9. $\lim\,\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n(3^n-1)\right]$

1.10. $\lim\,\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{3}{\sqrt{n+2}}}$

1.11. $\lim\,\left(\sqrt[n]{2} + \frac{2n-1}{3n+2}\right)$

1.12. $\lim\,\frac{\sqrt[n]{7}}{\sqrt{n+2}}$

2. Considere a sucessão de triângulos retângulos (a cinzento) em que o primeiro é obtido a partir da diagonal de um quadrado de lado $\frac{1}{2}$, e assim sucessivamente, como é sugerido na figura.



2.1. Justifique que a sucessão das áreas dos triângulos é uma progressão geométrica e determine um termo geral desta sucessão.

2.2. Determine o limite, quando n tende para $+\infty$, da soma das áreas dos n triângulos e interprete esse resultado geometricamente.

3. Calcule o limite das sucessões cujo termo geral se indica, identificando as indeterminações encontradas:

3.1. $a_n = \frac{3n-1}{1-2n}$

3.2. $b_n = \frac{n^2+2}{3+n}$

3.3. $c_n = \frac{n^3+2n}{n^2+n+1}$

3.4. $d_n = \sqrt{\frac{4n+1}{2+n}}$

3.5. $e_n = \frac{1-4n}{\sqrt{n^2+5}}$

3.6. $f_n = \frac{n+3}{\sqrt{n}+\sqrt{n^2+1}}$

3.7. $g_n = \sqrt{n^2+2} - n$

3.8. $h_n = \frac{3^n-4}{1-3^{n+1}}$

3.9. $i_n = 3^n - 4 \times 2^{2n}$

3.10. $j_n = \frac{n-\sin n}{n^2+2}$

3.11. $k_n = 4^{-n}(3^n-2)$

3.12. $l_n = \frac{\frac{2}{n}+\frac{\cos n}{n^2}}{\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n}}$

Soluções

1.

1.1.

$$\lim(-2n^3 + n^4) = \lim\left[n^4\left(-\frac{2}{n} + 1\right)\right] = +\infty \times (0 + 1) = +\infty$$

1.2.

$$\lim(n^5 - 4n) = \lim\left(n^5\left(1 - \frac{4}{n^4}\right)\right) = +\infty \times (1 - 0) = +\infty$$

1.3.

$$\lim(5n - \pi^{n+3}) = \lim\left[5^n\left(1 - \frac{\pi^{n+3}}{5^n}\right)\right] =$$

$$= \lim 5n \times \lim\left(1 - \left(\frac{\pi}{5}\right)^n \times \pi^3\right) = +\infty \times (1 - 0 \times \pi^3) = +\infty$$

1.4.

$$\lim\left(n - \sqrt{n^2 + 1}\right) = \lim\frac{\left(n - \sqrt{n^2 + 1}\right)\left(n + \sqrt{n^2 + 1}\right)}{n + \sqrt{n^2 + 1}} =$$

$$= \lim\frac{n^2 - (n^2 + 1)}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = \lim\frac{-1}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

1.5.

$$\lim\frac{n^3 + 2n - 3}{n^2 + 5n} = \lim\frac{n^3\left(1 + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right)}{n^2\left(1 + \frac{5}{n}\right)} = \lim\frac{n\left(1 + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right)}{1 + \frac{5}{n}} = \frac{+\infty \times (1 + 0 - 0)}{1 + 0} = +\infty$$

1.6.

$$\lim\frac{-3n^2 + n + 5}{n - 2n^2} = \lim\frac{-3n^2\left(1 - \frac{1}{3n} - \frac{5}{3n^2}\right)}{-2n^2\left(-\frac{1}{2n} + 1\right)} = \lim\frac{3\left(1 - \frac{1}{3n} - \frac{5}{3n^2}\right)}{2\left(-\frac{1}{2n} + 1\right)}$$

$$= \frac{3(1 - 0 - 0)}{2(0 + 1)} = \frac{3}{2}$$

1.7.

$$\lim\frac{4 - 2n}{n^3 + 3} = \lim\frac{n\left(\frac{4}{n} - 2\right)}{n^3\left(1 + \frac{3}{n^3}\right)} = \lim\frac{\frac{4}{n} - 2}{n^2\left(1 + \frac{3}{n^3}\right)} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

1.8.

$$\lim\frac{4^n + 1}{4^{n+2} + 3} = \lim\frac{4^n\left(1 + \frac{1}{4^n}\right)}{4^n\left(4^2 + \frac{3}{4^n}\right)} = \lim\frac{1 + \frac{1}{4^n}}{4^2 + \frac{3}{4^n}} = \frac{1 + 0}{16 + 0} = \frac{1}{16}$$

1.9.

$$\lim\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n(3^n - 1)\right] = \lim\left[\left(\frac{6}{5}\right)^n - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] = +\infty - 0 = +\infty$$

1.10.

$$\lim\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{3}{\sqrt{n+2}}}=\lim\frac{\sqrt{n+2}}{3\sqrt{n}}=\lim\frac{\sqrt{n}\times\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{3\sqrt{n}}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{3}=\frac{1}{3}$$

1.11.

$$\lim\left(\sqrt[n]{2}+\frac{2n-1}{3n+2}\right)=\lim\sqrt[n]{2}+\lim\frac{2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{3n\left(1+\frac{2}{3n}\right)}=1+\lim\frac{2\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{3\left(1+\frac{2}{3n}\right)}=1+\frac{2(1-0)}{3(1+0)}=\frac{5}{3}$$

1.12.

$$\lim\frac{\sqrt[n]{7}}{\sqrt{n+2}}=\lim\frac{\sqrt[n]{7}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=\frac{1}{+\infty\times(1+0)}=0$$

2.

2.1.

Dois triângulos sucessivos são semelhantes. A razão de semelhança entre os lados é de $\frac{1}{2}$ e, como tal, a razão de semelhança entre as áreas é de $\frac{1}{4}$. Logo, o termo geral pode ser dado por $A_n=\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ou $A_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$.

2.2.

A soma dos primeiros n triângulos sucessivos é dada por:

$$S=\frac{1}{8}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}$$

Assim, $\lim S=\frac{1}{8}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}$.

Geometricamente, tal significa que, à medida que o número de triângulos assim formados tende para $+\infty$, os triângulos preenchem $\frac{2}{3}$ da área do quadrado inicial.

3.

3.1.

$$\lim a_n=\lim\frac{3n-1}{1-2n}=\lim\frac{n\left(3-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-2\right)}=-\frac{3}{2}\ \left(\text{Indeterminação } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

3.2.

$$\lim b_n=\lim\frac{n^2+2}{3+n}=\lim\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(\frac{3}{n}+1\right)}=\lim\left[\frac{1+\frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n}+1}\right]=\lim n=+\infty$$

$\left(\text{Indeterminação } \frac{\infty}{\infty}\right)$

3.3.

$$\lim c_n = \lim \frac{n^3 + 2n}{n^2 + n + 1} = \lim \frac{n^3\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{n^3}{n^2} = \lim n = +\infty$$

$\left(\text{Indeterminação } \frac{\infty}{\infty}\right)$

3.4.

$$\lim d_n = \lim \sqrt{\frac{4n + 1}{2 + n}} = \lim \sqrt{\frac{n\left(4 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{2}{n} + 1\right)}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2$$

$\left(\text{Indeterminação } \frac{\infty}{\infty}\right)$

3.5.

$$\lim e_n = \lim \frac{1 - 4n}{\sqrt{n^2 + 5}} = \lim \frac{n\left(\frac{1}{n} - 4\right)}{n\sqrt{1 + \frac{5}{n^2}}} = \frac{-4}{\sqrt{1}} = -4$$

$\left(\text{Indeterminação } \frac{\infty}{\infty}\right)$

3.6.

$$\lim f_n = \lim \frac{n + 3}{\sqrt{n} + \sqrt{n^2 + 1}} = \lim \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0} + \sqrt{1 + 0}} = 1 \; \left(\text{Indeterminação } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

3.7.

$$\lim g_n = \lim\left(\sqrt{n + 2} - \sqrt{n}\right) = \lim \frac{\left(\sqrt{n + 2} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n + 2} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n + 2} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim \frac{n + 2 - n}{\sqrt{n + 2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{+\infty + \infty} = 0 \; (\text{Indeterminação } +\infty + (-\infty))$$

3.8.

$$\lim h_n = \lim \frac{3^n - 4}{1 - 3^{n+1}} = \lim \frac{3^n\left(1 - \frac{4}{3^n}\right)}{3^n\left(\frac{1}{3^n} - 3\right)} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

$\left(\text{Indeterminação } \frac{\infty}{\infty}\right)$

3.9.

$$\lim i_n = \lim(3^n - 4 \times 2^{2n}) = \lim(3^n - 4^{n+1}) = \text{li}$$

$$= +\infty(0 - 4) = -\infty \; (\text{Indeterminação } +\infty + (-\infty))$$

3.10.

$$\lim j_n = \lim \frac{n - \sin n}{n^2 + 2} = \lim\left(\frac{n}{n^2 + 2} - \frac{\sin n}{n^2 + 2}\right) =$$

$$= \lim\left(\frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} - \sin n \times \frac{1}{n^2 + 2}\right)$$

Tem-se que $\lim \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$, $\lim \frac{1}{n^2 + 2} = 0$ e $\sin n$ é limitada.

Logo:

$$\lim\left(\frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} - \sin n \times \frac{1}{n^2 + 2}\right) = 0 - 0 = 0$$

$\left(\text{Indeterminação } \frac{\infty}{\infty}\right)$

3.11.

$$\lim k_n = \lim(4^{-n}(3^n - 2)) = \lim \frac{3^n - 2}{4^n} = \lim\left(\frac{3^n}{4^n} - \frac{2}{4^n}\right) =$$

$$= \lim\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{2}{4^n}\right] = 0 - \frac{2}{+\infty} = 0 \text{ (Indeterminação } 0 \times \infty)$$

3.12.

$$\lim l_n = \lim \frac{\frac{2}{n} + \frac{\cos n}{n^2}}{\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n}} = \lim \frac{\frac{2n + \cos n}{n^2}}{\frac{2 - 3n}{n^2}} =$$

$$= \lim \frac{2n + \cos n}{2 - 3n} = \lim\left(\frac{2n}{2 - 3n} + \frac{\cos n}{2 - 3n}\right) =$$

$$= \lim\left(\frac{2}{\frac{2}{n} - 3} + \cos n \times \frac{1}{2 - 3n}\right)$$

Tem-se que $\lim \frac{2}{\frac{2}{n} - 3} = -\frac{2}{3}$, $\lim \frac{1}{2 - 3n} = 0$ e $\cos n$ é limitada.

Logo:

$$\lim\left(\frac{2}{\frac{2}{n} - 3} + \cos n \times \frac{1}{2 - 3n}\right) = -\frac{2}{3} + 0 = -\frac{2}{3}$$

$\left(\text{Indeterminação } \frac{0}{0}\right)$