Juros compostos e número de Neper

1. A Joana ganhou um prémio no Euromilhões no valor de 5624,30 euros.
   Resolveu depositar a totalidade do prémio a prazo na modalidade de juros compostos a uma taxa anual de 0,22%.
   Determine o total ganho em juros se esta mantiver o depósito durante oito anos sem efetuar nenhum levantamento.

2. Os avós do João, no dia em que este nasceu, fizeram um investimento de 1500 euros num depósito com juros compostos com uma taxa de 2,5% ao ano.
   Sabendo que durante os próximos dez anos a taxa não se alterou e que, a partir daí, a taxa desceu para 1,65%, determine o capital acumulado quando o João fez 18 anos.
   Admita que os avós do João não efetuaram qualquer levantamento durante esses anos.

3. Admita que se depositam numa conta a prazo 10 000 euros e que a taxa de juros anual é de 3%, independentemente do número de capitalizações anuais.

   Complete a tabela seguinte relativa ao capital disponível no final do primeiro ano.

Capitalizações	Taxa de juro	Capital
Anuais	$3\ \%$	$10\,000 \times 1{,}03$
Semestrais	$\frac{3}{2} = 1{,}5\ \%$	$10\,000 \times 1{,}030225$
Mensais		
Diárias		
Horárias		
n		

4. O Miguel tem 5000 euros para investir e, após alguma pesquisa, encontra duas opções que considera interessantes:
   Opção I: Juros compostos a uma taxa anual de 0,9% com capitalizações anuais;
   Opção II: Juros compostos a uma taxa anual de 0,89% com capitalização trimestral.
   Qual é a opção mais vantajosa para o Miguel se pretender manter o depósito por dois anos?

5. Mostre, por indução matemática, que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_4, n! \geq 2^n$$

Soluções

1.

$$c_8 = 5624{,}30 \times \left(1 + \frac{0{,}22}{100}\right)^2 = 5724{,}053248$$

$5724{,}05 - 5624{,}30 = 99{,}75$

Assim, o total ganho em juros nos oito anos é $99{,}75$ € .

2.

$$c_{10} = 1500 \times \left(1 + \frac{2{,}5}{100}\right)^{10} = 1920{,}126816$$

Ao fim de 10 anos, o capital acumulado é de $1920{,}13$ € .

$$c_8 = 1920{,}13 \times \left(1 + \frac{1{,}65}{100}\right)^8 = 2188{,}717432$$

Ao fim de 18 anos serão acumulados $2188{,}72$ € .

3.

Mensais

$\frac{3}{12} = 0{,}25;$

$10\,000 \times 1{,}030415957$

Horárias

$\frac{3}{8760} \approx 3{,}425 \times 10^{-4}$

$10\,000 \times 1{,}030457572$

Diárias

$\frac{3}{365} \approx 0{,}00822$

$10\,000 \times 1{,}030456355$

***n* capitalizações**

$\frac{3}{n}$

$$10\,000 \times \left(1 + \frac{3}{100n}\right)^n$$

4.

Opção I:

1.º ano:

$$c_1 = 5000 \times \left(1 + \frac{0{,}9}{100}\right)^1 = 5045$$

2.º ano:

$$c_2 = 5045 \times \left(1 + \frac{0{,}9}{100}\right)^1 = 5090{,}405$$

Ou

$$c_2 = 5000 \times \left(1 + \frac{0{,}9}{100}\right)^2 = 5090{,}405$$

Opção II:

1.º ano:

$$c_1 = 5000 \times \left(1 + \frac{0{,}89}{100 \times 4}\right)^4 = 5044{,}648739$$

2.º ano:

$$c_2 = 5044{,}65 \times \left(1 + \frac{0{,}89}{100 \times 4}\right)^4 = 5089{,}697452$$

A primeira opção é a mais vantajosa.

5.

Seja $n = 4$: $4! \geqslant 2^4 \Leftrightarrow 24 \geqslant 16$ ✓

Suponhamos que: $\forall\, n \in \mathbb{N}_4$, $n! \geqslant 2^n$

Mostremos que: $(n+1)! \geqslant 2^{n+1}$:

$$(n+1)! = (n+1)n! \underset{(n! \geqslant 2^n)}{\geqslant} (n+1) \times 2^n \underset{(n+1 \geqslant 2)}{\geqslant} 2^n \times 2 = 2^{n+1}$$