Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 26.05.2011

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(D)**

Tem-se: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+a=1 \Longleftrightarrow a=\frac{1}{6}$

2. Resposta **(B)**

O número de casos favoráveis é ${}^{16}C_2$ (número de maneiras de escolher duas bolas de entre 16).

O número de casos possíveis é 3 $\left(\{1,6\},\{2,5\}\right.$ e $\left.\{3,4\}\right)$

Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{3}{{}^{16}C_2}=\frac{1}{40}$

3. Resposta **(D)**

Na opção D, tem-se:

$g(-1)=(-1)^2-f(-1)=1-3=-2$

$g(4)=4^2-f(4)=16-9=7$

Como $g(-1)$ e $g(4)$ têm sinais contrários, e como g é contínua no intervalo $[-1,4]$, o teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero de g no intervalo $]-1,4[$

Em cada uma das restantes opções, $g(-1)$ e $g(4)$ têm o mesmo sinal.

4. Resposta **(C)**

Da observação do gráfico, conclui-se que a função f é estritamente crescente. Portanto, f' é sempre positiva.

Como o gráfico tem a concavidade voltada para baixo, conclui-se que f'' é sempre negativa.

5. Resposta **(B)**

Seja z o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto B

Como os pontos A e B estão igualmente distanciados da origem do referencial, tem-se

$|z| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

Como o arco BC tem $\frac{\pi}{9}$ de amplitude , tem-se que um argumento de z é $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{9} = \frac{25\pi}{18}$

Portanto, $z = 5\,\text{cis}\,\frac{25\pi}{18}$

GRUPO II

1. Como 1 é um zero do polinómio $z^3 - z^2 + 4z - 4$, este polinómio é divisível por $z-1$

Efectuando a divisão do polinómio $z^3 - z^2 + 4z - 4$ por $z-1$, utilizando a regra de Ruffini, tem-se:

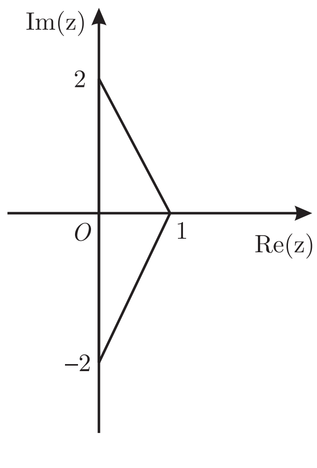
	1	–1	4	–4
1		1	0	4
	1	0	4	$\boxed{0}$

Portanto,

$z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0 \Longleftrightarrow (z-1)(z^2+4) = 0 \Longleftrightarrow z-1=0 \;\vee\; z^2+4=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow z=1 \;\vee\; z=2i \;\vee\; z=-2i$

Na figura, está representado o triângulo cujos vértices são as imagens geométricas dos números complexos 1, $2i$ e $-2i$



O perímetro deste triângulo é igual a $4 + 2\sqrt{5}$

2.1. Tem-se:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(2+\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{e\,x-e}\right) = 2+\lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{e(x-1)} = 2+\frac{1}{e}\lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}$$

Seja $y = x-1$. Como $x \to 1^-$, $y \to 0^-$

Tem-se:

$$2+\frac{1}{e}\lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} = 2+\frac{1}{e}\lim_{y\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 2+\frac{1}{e}\times 1 = 2+\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x\,e^{-x}+2x\right) = e^{-1}+2 = \frac{1}{e}+2$$

$$f(1) = \frac{1}{e}+2$$

Portanto, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

Podemos então concluir que a função f é contínua em $x=1$

2.2. Seja m o declive da assimptota, e seja b a sua ordenada na origem.

Tem-se:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\,e^{-x}+2x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+2\right) = 0+2 = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-x}+2x-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Portanto, a equação reduzida da assimptota oblíqua do gráfico da função f é $y=2x$

2.3. Em $[1,+\infty[$, tem-se $\frac{f(x)}{x} = e^{-x}+2$

$$e^{-x}+2 = e^x-\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x}+2 = e^x-\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3+6e^x = 3\left(e^x\right)^2-2e^x \Leftrightarrow 3\left(e^x\right)^2-8e^x-3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{8\pm\sqrt{64-4\times 3\times(-3)}}{6} \Leftrightarrow e^x = \frac{8\pm 10}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 3 \;\vee\; \underbrace{e^x = -\frac{1}{3}}_{\text{Equação impossível}} \Leftrightarrow e^x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = \ln 3$$

Como $\ln 3 > 1$, conclui-se que $\ln 3$ é solução da equação.

3.1. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{1}{1+d}$$

Portanto, $f(x) = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1-\dfrac{1}{1+d}}{\dfrac{1}{1+d}} = \left(1-\dfrac{1}{1+d}\right)\times(1+d) = 1+d-1 = d$

2.º Processo

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{1}{1+d}$$

Tem-se

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{1+d} \Leftrightarrow (1+d)\operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x + d\operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow d = \frac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow d = f(x)$$

3.2. $f'(x) = \left(\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \dfrac{(1-\operatorname{sen} x)'\operatorname{sen} x - (1-\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{-\cos x \operatorname{sen} x - (1-\operatorname{sen} x)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} =$

$$= \frac{-\cos x \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Para qualquer $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se $\cos x > 0$, logo $f'(x) < 0$, pelo que a função f é decrescente.

Assim, quanto maior é o valor de x, menor é o valor de d

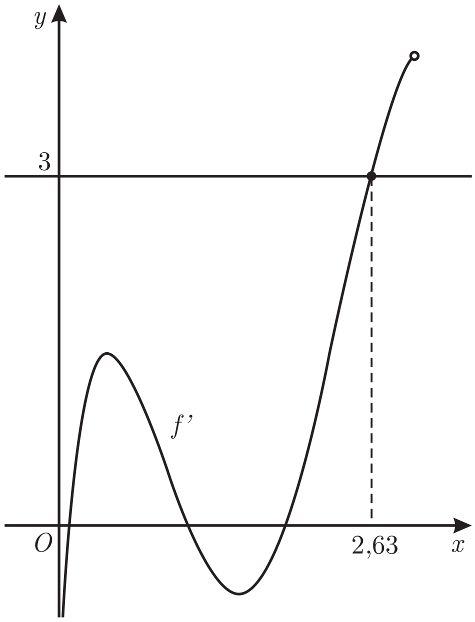
Portanto, a afirmação é verdadeira.

4. Designando por x a abcissa do ponto A, o declive da recta tangente ao gráfico da função f, no ponto A, é igual a $f'(x)$

Trata-se, assim, de encontrar o valor de x tal que $f'(x) = 3$

$$f'(x) = 3 \Leftrightarrow \left(x \ln x + \operatorname{sen}(2x)\right)' = 3 \Leftrightarrow \ln x + 1 + 2\cos(2x) = 3$$

Na figura, estão representados o gráfico da função f' e a recta de equação $y = 3$, bem como o ponto de intersecção destas duas linhas. Também se indica a abcissa deste ponto, arredondada às centésimas.



Portanto, a abcissa do ponto A, arredondada às centésimas, é $2{,}63$

5. Tem-se:

$$P(A \cup B) < P(A \mid B) \times P(\overline{B}) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) < P(A \mid B) \times (1 - P(B)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) < P(A \mid B) - P(A \mid B) \times P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) < P(A \mid B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) < P(A \mid B)$$