Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 19.01.2011

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$

(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\ \pi\ r^2$

(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\dfrac{4}{3}\ \pi\ r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\ \theta)^n = \rho^n\ cis\ (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\ \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
- Escreva, na sua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Na Figura 1, está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_9(x)$

P é o ponto do gráfico de f que tem ordenada $\frac{1}{2}$

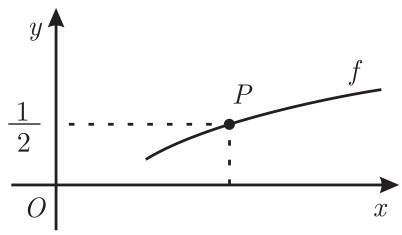

Figura 1

Qual é a abcissa do ponto P ?

(A) $\frac{3}{2}$ **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** $\frac{9}{2}$

2. Os vinte e cinco alunos de uma turma do 12.º ano distribuem-se, por idade e sexo, de acordo com a tabela seguinte.

	17 anos	**18 anos**
Rapazes	8	2
Raparigas	11	4

Escolhe-se, ao acaso, um dos vinte e cinco alunos da turma.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «O aluno escolhido é do sexo masculino»

B: «O aluno escolhido tem 18 anos»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$?

(A) $\frac{2}{25}$ **(B)** $\frac{14}{25}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

3. O terceiro elemento de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 55.

Qual é o penúltimo elemento dessa linha?

(A) 10 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 13

4. A Filipa pratica atletismo.

O tempo X, em segundos, que a Filipa demora a correr os 400 metros é uma variável aleatória bem modelada por uma distribuição normal de valor médio 80.

Sabe-se que $P(76 < X < 80) = 0{,}4$

Para um certo valor de a, tem-se $P(X > a) = 0{,}1$

Qual é o valor de a?

(A) 78 **(B)** 82 **(C)** 84 **(D)** 88

5. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado quinze vezes.

Indique qual dos acontecimentos seguintes tem probabilidade igual a

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{15} - {}^{15}C_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{14}$$

(A) A face 4 sai pelo menos uma vez.

(B) A face 4 sai pelo menos duas vezes.

(C) A face 4 sai no máximo uma vez.

(D) A face 4 sai no máximo duas vezes.

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Determine, **sem recorrer à calculadora**, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_3\left(7x+6\right) \geq 2 + \log_3\left(x\right)$$

Apresente a sua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

2. Na década de sessenta do século passado, uma doença infecciosa atacou a população de algumas regiões do planeta.

Admita que, ao longo dessa década, e em qualquer uma das regiões afectadas, o número, em **milhares**, de pessoas que estavam infectadas com a doença, t anos após o início de 1960, é dado, aproximadamente, por

$$I(t) = \frac{3\ e^{kt}}{1 + p\ e^{kt}}$$

em que k e p são parâmetros reais.

Resolva os dois itens seguintes **sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar cálculos numéricos.

2.1. Admita que, para uma certa região, $k = \frac{1}{2}$ e $p = 1$

Determine o ano em que o número de pessoas que estavam infectadas, nessa região, atingiu 2500.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.2. Numa outra região, constatou-se que havia um milhar de pessoas que estavam infectadas no início de 1961.

Qual é, para este caso, a relação entre k e p?

Apresente a sua resposta na forma $k = -\ln(A + Bp)$, em que A e B são números reais.

3. A Ana dispõe de sete cartas todas diferentes: quatro cartas do naipe de espadas e três cartas do naipe de copas.

3.1. A Ana vai dispor essas sete cartas sobre uma mesa, lado a lado, da esquerda para a direita, de modo a formar uma sequência com as sete cartas.

A Ana pretende que a primeira e a última cartas da sequência sejam ambas do naipe de espadas.

Quantas sequências diferentes, nestas condições, pode a Ana fazer?

3.2. Admita que a Ana baralha essas sete cartas e, em seguida, tira três, ao acaso.

Qual é a probabilidade de, nessas três cartas, haver pelo menos uma carta de copas?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3.3. As cartas de que a Ana dispõe são:

- o ás, o rei, a dama e o valete do naipe de espadas;
- o rei, a dama e o valete do naipe de copas.

Depois de introduzir as sete cartas num saco, a Ana retira uma carta ao acaso.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «A carta retirada é do naipe de espadas»

B: «A carta retirada é um rei»

Averigúe se os acontecimentos A e B são independentes.

4. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $\left(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega\right)$

Sabe-se que:

- $P\left(B\right) = 0{,}3$
- $P(A|B) = 0{,}2$
- $P(\overline{A}|\overline{B}) = 0{,}4$

Determine $P(B|A)$

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5. Uma caixa contém quatro bolas brancas e quatro bolas pretas.

Considere a experiência seguinte.

Tira-se, ao acaso, uma bola da caixa. Se a bola for branca, repõe-se na caixa; se a bola for preta, deixa-se ficar fora da caixa.

Em seguida, tira-se, também ao acaso, uma segunda bola da caixa, e procede-se do mesmo modo: se a bola for branca, repõe-se na caixa; se a bola for preta, deixa-se ficar fora da caixa.

Seja X o número de bolas que, no final da experiência, estão fora da caixa.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X

Apresente as probabilidades na forma de fracção.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
4.	10 pontos
5.	10 pontos
	50 pontos

GRUPO II

1.	20 pontos
2.	
2.1.	20 pontos
2.2.	20 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	20 pontos
3.3.	15 pontos
4.	20 pontos
5.	20 pontos
	150 pontos

TOTAL .... **200 pontos**