Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 24.05.2012

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(B)**

Tem-se: $b = a^{\pi} \Leftrightarrow \log_a b = \pi$

$\log_a (a^{12} \times b^{100}) = \log_a (a^{12}) + \log_a (b^{100}) = 12 + 100 \log_a b = 12 + 100\pi \approx 326$

2. Resposta **(D)**

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, tem-se $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. Tal permite excluir as opções B e C.

Como a bissetriz dos quadrantes ímpares é assíntota do gráfico de f, tem-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. Tal permite excluir a opção A.

3. Resposta **(A)**

Das informações dadas no enunciado, podemos concluir, por aplicação do teorema de Bolzano, que a função $f - g$ tem pelo menos um zero em $]2, 3[$. Portanto, $\exists c \in]2, 3[: \ f(c) - g(c) = 0$, ou seja, $\exists c \in]2, 3[: \ f(c) = g(c)$, pelo que os gráficos das funções f e g se intersectam em pelo menos um ponto.

4. Resposta **(D)**

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

5. Resposta **(C)**

Tem-se $|z| = \overline{OQ}$

Aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{OQ}^{\,2} = \left(\frac{\overline{OQ}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{OQ}^{\,2} = \frac{\overline{OQ}^{\,2}}{4} + 3 \Leftrightarrow 4\,\overline{OQ}^{\,2} = \overline{OQ}^{\,2} + 12 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \overline{OQ}^{\,2} = 4 \Leftrightarrow \overline{OQ} = 2$ Portanto, $|z| = 2$

Como o triângulo $[OPQ]$ é equilátero, tem-se $Q\hat{O}P = \frac{\pi}{3}$

Portanto, um argumento de z é $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

GRUPO II

1. $$\frac{\left(\sqrt{2}\,i\right)^3 \times \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}}{k+i} = \frac{2\sqrt{2}\,i^3 \times \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)}{k+i} = \frac{-2\sqrt{2}\,i \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{k+i} =$$

$$= \frac{-2i - 2i^2}{k+i} = \frac{2-2i}{k+i} = \frac{(2-2i)(k-i)}{(k+i)(k-i)} = \frac{2k - 2i - 2ki + 2i^2}{k^2+1} = \frac{2k - 2 + (-2-2k)i}{k^2+1} =$$

$$= \frac{2k-2}{k^2+1} + \frac{-2-2k}{k^2+1}i$$

Para esta expressão designar um número real, $\frac{-2-2k}{k^2+1}$ tem de ser igual a zero, pelo que $k = -1$

2.1. Seja X o número de vezes que, nas cinco realizações da experiência, sai bola preta.

Tem-se que X é uma variável aleatória com distribuição binomial.

A probabilidade de sair bola preta, em cada realização da experiência, é $\frac{2}{3}$

$$P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) = {}^5C_4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + {}^5C_5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 =$$

$$= 5 \times \frac{16}{81} \times \frac{1}{3} + \frac{32}{243} = \frac{80}{243} + \frac{32}{243} = \frac{112}{243}$$

2.2. No contexto da situação descrita, $P(\overline{B} \mid A)$ é a probabilidade de as bolas retiradas da caixa 2 serem de cores diferentes, sabendo que as bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor.

Dado que as bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor, elas são necessariamente pretas, pelo que a caixa 2 fica com três bolas brancas e seis bolas pretas, num total de nove bolas.

Retiramos então duas bolas dessas nove, e queremos determinar a probabilidade de elas serem de cores diferentes, ou seja, de uma ser branca e a outra ser preta.

Existem ${}^9C_2$ maneiras diferentes de tirar simultaneamente duas bolas, de entre nove. Por isso, o número de casos possíveis é ${}^9C_2$

Existem 3×6 maneiras diferentes de tirar simultaneamente uma bola branca e uma bola preta. Por isso, o número de casos favoráveis é 3×6

Assim, a probabilidade pedida é $\dfrac{3 \times 6}{{}^9C_2} = \dfrac{1}{2}$

3.1. Tem-se $\operatorname{sen} x = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{PQ}}{2}$, pelo que $\overline{PQ} = 2 \operatorname{sen} x$

Tem-se $\cos x = \dfrac{\overline{BQ}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{BQ}}{2}$, pelo que $\overline{BQ} = 2 \cos x$

Portanto,

$$A(x) = \frac{\overline{AQ} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{(2 + 2\cos x) \times 2 \operatorname{sen} x}{2} = (2 + 2\cos x) \times \operatorname{sen} x =$$

$$= 2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)$$

3.2. $A'(x) = \left[2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)\right]' = 2\cos x + 2\cos(2x)$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x + 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = -\cos(2x) \Leftrightarrow \cos x = \cos(\pi - 2x)$

Em $\mathbb{R}$, tem-se:

$$\cos x = \cos(\pi - 2x) \Leftrightarrow x = \pi - 2x + 2k\pi \ \vee \ x = -(\pi - 2x) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \ \vee \ -x = -\pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \ \vee \ x = \pi - 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a equação $A'(x) = 0$ tem apenas uma solução: $\frac{\pi}{3}$

Tem-se, então, o seguinte quadro:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
A'	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
A	n.d.	↗	Máx.	↘	n.d.

Portanto, existe um valor de x, $\frac{\pi}{3}$, para o qual a área do triângulo $[APQ]$ é máxima.

4.1. O declive da reta r é $f'(2)$

O declive da reta s é $f'(b)$

Como as retas r e s são paralelas, tem-se $f'(b) = f'(2)$

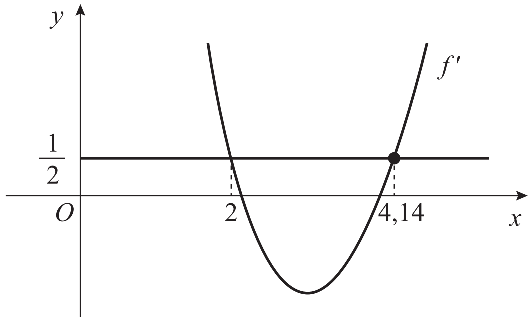
Portanto, uma equação que traduz o problema é $f'(x) = f'(2)$

Tem-se $f'(2) = 2^2 - 4 \times 2 + \frac{9}{2} - 4\ln 1 = 4 - 8 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$

Portanto, $f'(x) = f'(2) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$

Temos, portanto, de resolver a equação $f'(x) = \frac{1}{2}$

Recorrendo à calculadora, podemos visualizar o gráfico de f' e a reta de equação $y = \frac{1}{2}$



Como era de esperar, 2 é uma das soluções da equação $f'(x) = \frac{1}{2}$

A outra solução é b

Portanto, $b \approx 4{,}14$

4.2. Tem-se $f''(x) = \left[x^2 - 4x + \frac{9}{2} - 4\ln(x-1)\right]' = 2x - 4 - \frac{4}{x-1}$

Como $x \in \left]1, +\infty\right[$, tem-se:

$$2x - 4 - \frac{4}{x-1} = 0 \underset{\text{pois } x-1 \neq 0}{\Leftrightarrow} (2x-4)(x-1) - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4x + 4 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(2x-6) = 0 \underset{\text{pois } x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Como o único zero da segunda derivada é 3, é esta a abcissa do ponto de inflexão.

5. A função f é contínua em $x=2$ se existir $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ e se esse limite for igual a $f(2)$

Tem-se:

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{xe^x - 2e^2}{x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=}$ $\quad \boxed{y = x-2}$

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{(y+2)\,e^{y+2} - 2e^2}{y} = \lim_{y\to 0^-} \frac{ye^{y+2} + 2e^{y+2} - 2e^2}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{ye^{y+2} + 2e^2(e^y - 1)}{y} = \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{ye^{y+2}}{y} + \frac{2e^2(e^y-1)}{y} \right) =$$

$$= \lim_{y\to 0^-} e^{y+2} + 2e^2 \times \lim_{y\to 0^-} \frac{e^y - 1}{y} = e^2 + 2e^2 \times 1 = 3e^2$$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left[3e^x + \ln(x-1)\right] = 3e^2 + \ln 1 = 3e^2$

- $f(2) = 3e^2$

Portanto, f é contínua em $x=2$