TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

15 de Março de 2007

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. $e^{-x} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{-x} > e^{-1} \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{B}}$

2. $\log_a \left(a \times \sqrt[3]{a} \right) = \log_a (a) + \log_a \left(\sqrt[3]{a} \right) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{B}}$

3. $$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{g(x)}{x} \times \Big(g(x) - 2x \Big) \right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} \times \lim_{x\to+\infty} \Big(g(x) - 2x \Big) = 2 \times 3 = 6$$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{C}}$

4. Tem-se que: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{B}}$

5. <u>Número de casos possíveis</u>:
O número de casos possíveis é ${}^{20}C_3$ (número de maneiras de escolher três bolas, de entre vinte).

<u>Número de casos favoráveis</u>:
O maior dos números saídos é 10 se, e só se:
- for escolhida a bola número 10;
- as outras duas bolas forem escolhidas de entre as bolas numeradas de 1 a 9.

Portanto,
- para a bola número 10, existe apenas uma hipótese,
- para as outras duas bolas, existem ${}^{9}C_2$ hipóteses.

O número de casos favoráveis é, assim, $1 \times {}^{9}C_2 = {}^{9}C_2$

A probabilidade pedida é $\dfrac{{}^{9}C_2}{{}^{20}C_3} = \dfrac{36}{{}^{20}C_3}$ $\boxed{\text{Resposta } \mathbf{D}}$

6. Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, resulta que $P(A \cap B) = 0$

Portanto, $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0}{P(B)} = 0$

Resposta **A**

7. Com duas das seis moedas,
• não é possível obter 40 cêntimos, na opção A;
• não é possível obter 20 cêntimos, na opção B.
Estas duas opções estão, assim, excluídas.
Relativamente às opções C e D, os valores que a variável X pode tomar são os que constam da tabela. Para escolher uma destas opções, calculemos, para cada uma delas, por exemplo, $P(X = 20)$.

No caso da opção C, tem-se $P(X = 20) = \dfrac{{}^2C_2}{{}^6C_2} = \dfrac{1}{{}^6C_2}$

No caso da opção D, tem-se $P(X = 20) = \dfrac{{}^3C_2}{{}^6C_2} = \dfrac{3}{{}^6C_2}$

Resposta **D**

Grupo II

1. Tem-se que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x+2)}{x(x^2+1)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x+2}{x^2+1} = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2 - x \ln(x+1)}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{3x^2}{x^2} - \frac{x \ln(x+1)}{x^2} \right] = \lim_{x \to 0^+} \left[3 - \frac{\ln(x+1)}{x} \right] =$$

$$= 3 - 1 = 2$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$, podemos concluir que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$.

Como $f(0) = 2$, resulta que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, pelo que a função é contínua em $x = 0$.

2.

2.1. Tem-se: $-\log_{10}(x) = 7{,}4 \;\Leftrightarrow\; \log_{10}(x) = -7{,}4 \;\Leftrightarrow\; x = 10^{-7{,}4}$

Logo, $x \approx 4 \times 10^{-8}$

Portanto, a concentração de iões H_3O^+, no sangue arterial humano é, aproximadamente, de $4 \times 10^{-8}\ mol/dm^3$.

2.2. De acordo com a sugestão, designemos por l a concentração de iões H_3O^+ no leite.

Então, a concentração de iões H_3O^+ no café é dada por $3l$ (pois, de acordo com o enunciado, a concentração de iões H_3O^+ no café é tripla da concentração de iões H_3O^+ no leite).

Assim, a diferença entre o pH do leite e o pH do café é igual a

$$\underbrace{-\log_{10}(l)}_{pH\ \text{do leite}} \;-\; \underbrace{\left[-\log_{10}(3l)\right]}_{pH\ \text{do café}}$$

Tem-se que:

$$-\log_{10}(l) - \left[-\log_{10}(3l)\right] = -\log_{10}(l) + \log_{10}(3l) =$$

$$= -\log_{10}(l) + \log_{10}(3) + \log_{10}(l) = \log_{10}(3) \approx 0{,}5$$

Portanto, a diferença entre o pH do leite e o pH do café é igual a $0{,}5$

3.

3.1. Dizer que a recta r intersecta a curva C em pelo menos um ponto equivale a dizer que existe pelo menos um elemento do domínio de f que é solução da equação $f(x) = 5$.

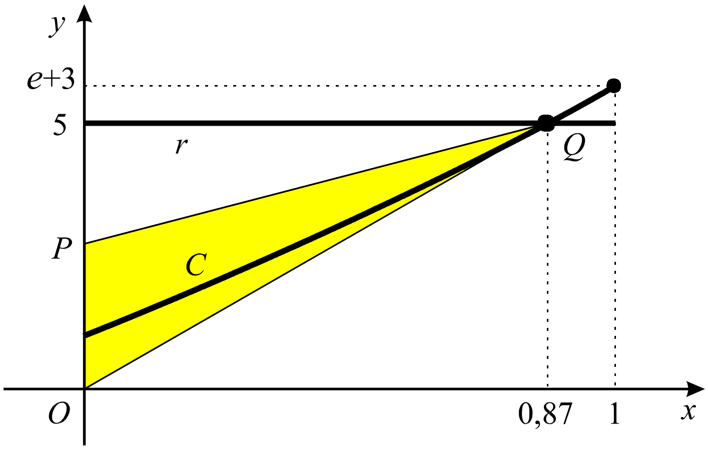
A função f é contínua no intervalo $[0, 1]$, pois é soma de duas funções contínuas.

Como $f(0) = 1$, tem-se que $f(0) < 5$.

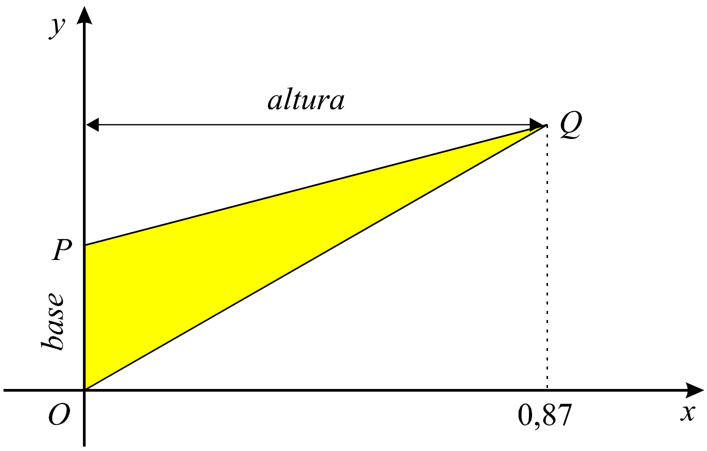
Como $f(1) = e + 3 \approx 2{,}7 + 3 = 5{,}7$ tem-se que $f(1) > 5$

Como a função f é contínua no intervalo $[0, 1]$, e como $f(0) < 5 < f(1)$, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que, no intervalo $]0, 1[$, existe pelo menos uma solução da equação $f(x) = 5$, pelo que a recta r intersecta a curva C em pelo menos um ponto.

3.2. Representa-se a seguir o referencial, a curva C e a recta r, visualizados na calculadora.
Representa-se também o triângulo $[OPQ]$, onde O é a origem do referencial, P é o ponto de coordenadas $(0\ ,\ e)$ e Q é o ponto de intersecção da curva C com a recta r.
Indica-se ainda, com duas casas decimais, a abcissa de Q, determinada com recurso às ferramentas adequadas da calculadora.



Na figura seguinte está apenas representado o triângulo $[OPQ]$.



Determinemos a área deste triângulo.
Tomando para base o segmento $[OP]$, a altura correspondente é o segmento em que:
- um dos extremos é o vértice oposto a essa base, ou seja, o ponto Q;
- o outro extremo é o ponto de intersecção da recta que contém a base com a recta que lhe é perpendicular e que passa por Q.

A área do triângulo é, portanto, $\dfrac{base \times altura}{2} \approx \dfrac{e \times 0{,}87}{2} \approx 1{,}2$

4. Tem-se que

$$f(0) = e^0 - c = 1 - c$$

pelo que o ponto B tem coordenadas $(0, 1-c)$.

Tem-se também que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - c = 0 \quad \Leftrightarrow e^x = c \Leftrightarrow x = ln(c)$$

pelo que o ponto A tem coordenadas $(ln(c), 0)$.

Portanto,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 1-c) - (ln(c), 0) = (\, - ln(c), 1-c)$$

O declive da recta AB é, portanto, $\dfrac{1-c}{-ln(c)} = \dfrac{c-1}{ln(c)}$

Tem-se, então,

$$\frac{c-1}{ln(c)} = c - 1 \Leftrightarrow ln(c) = 1 \quad \Leftrightarrow c = e$$