TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. $\log_a 3 \ + \ 2\log_a 5 \ = \ \log_a(3\times 5^2) = \log_a 75$ **Resposta C**

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) \ = \ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{f(x)}\right) \ = \ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{f(x)}{x}} \ =$

$= \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

O gráfico de h tem uma assimptota horizontal de equação $y=3$ **Resposta D**

3. Na opção A, tem-se: $g(-2) = -2+f(-2) = -2+1 = -1$

$g(2) = 2+f(2) = 2+3 = 5$

Como $g(-2)$ e $g(2)$ têm sinais contrários e como g é contínua no intervalo $[-2,2]$, o Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero de g no intervalo $]-2,2[$

Em cada uma das restantes opções, $g(-2)$ e $g(2)$ têm o mesmo sinal.

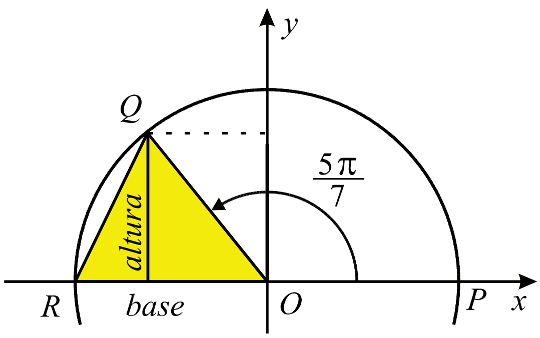
Resposta A

4.

$$Área = \frac{base \times altura}{2} =$$

$$= \frac{1 \times sen\left(\frac{5\pi}{7}\right)}{2} \approx$$

$$\approx 0{,}39$$



Resposta A

5. De acordo com a Lei Binomial, $p = {}^5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}16$ **Resposta B**

Grupo II

1. Tem-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Substituindo, nesta igualdade, $P(A \cup B)$ por $5\,P(A \cap B)$, vem:

$5\,P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, pelo que

$6\,P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Como $P(A) = P(B)$, vem $6\,P(A \cap B) = 2\,P(B)$

Vem, então, $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

2. De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis.

O número de casos possíveis é 6^3 pois, como em cada lançamento existem seis hipóteses, no conjunto dos três lançamentos existem $6 \times 6 \times 6$ possibilidades.

Relativamente aos casos favoráveis a «*o produto dos números saídos ser igual a 6*», existem duas hipóteses em alternativa, que se excluem mutuamente: ou os números saídos são 1, 2 e 3, ou são 1, 1 e 6. No primeiro caso, temos $3!$ possibilidades, que é o número de permutações de três elementos. No segundo caso, temos 3 possibilidades (a face 6 pode sair, ou no primeiro lançamento, ou no segundo, ou no terceiro). Portanto, o número de casos favoráveis é $3! + 3$.

3.1. Tem-se $f(0) = 100 \Leftrightarrow \dfrac{2\,000}{1+k} = 100 \Leftrightarrow k = 19$

3.2. Tem-se $f(t) = 500 \Leftrightarrow \dfrac{2\,000}{1+24\,e^{-0{,}13\,t}} = 500 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\,000 = 500\,(1 + 24\,e^{-0{,}13\,t}) \Leftrightarrow \dfrac{2\,000}{500} = 1 + 24\,e^{-0{,}13\,t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 = 1 + 24\,e^{-0{,}13\,t} \Leftrightarrow 3 = 24\,e^{-0{,}13\,t} \Leftrightarrow \dfrac{3}{24} = e^{-0{,}13\,t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{8} = e^{-0{,}13\,t} \Leftrightarrow -0{,}13\,t = \ln\left(\dfrac{1}{8}\right) \Leftrightarrow -0{,}13\,t = -\ln 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}13\,t = \ln 8 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 8}{0{,}13}$ Portanto, $t \approx 16$

4.1.1. Para $x \in]0,3]$, tem-se $f'(x) = -1 + \frac{3}{1+3x}$

A abcissa do ponto A é a solução da equação $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{1+3x} = 1 \Leftrightarrow 1+3x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

4.1.2. Tem-se: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1 + x}{x} =$

$$= \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} + 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} [2 - x + \ln(1+3x)] = 2 - 0 + \ln(1) = 2$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$, tem-se $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

Uma vez que $f(0) = 2$, tem-se $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

Portanto, f é contínua no ponto 0

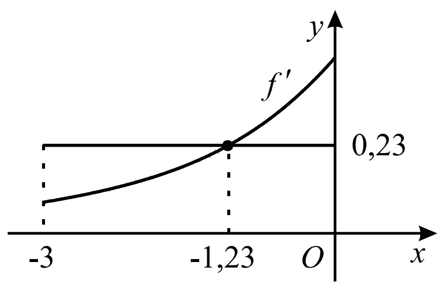
4.2. A abcissa do ponto B é a solução da equação $f'(x) = 0{,}23$ para $x \in [-3, 0[$

Tem-se: $f'(x) = \frac{(e^x - 1 + x)' \cdot x - (x)' \cdot (e^x - 1 + x)}{x^2} =$

$$= \frac{(e^x + 1) \cdot x - (e^x - 1 + x)}{x^2} = \frac{e^x . x - e^x + 1}{x^2}$$

Na figura está representado o gráfico de f', para x entre -3 e 0, a recta de equação $y = 0{,}23$ e o ponto de intersecção das duas linhas.

A solução da equação $f'(x) = 0{,}23$ é a abcissa deste ponto.



Portanto, a abcissa do ponto B é $-1{,}23$

Nota: para obter o gráfico de f', não era necessário determinar a expressão que a define. Teria bastado utilizar a ferramenta apropriada da calculadora (por exemplo: *nDerive* numa calculadora Texas, $\frac{d}{dx}$ numa calculadora Casio, etc.).