Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 29.04.2008

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste. A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha \, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\, maior \times Diagonal\, menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\, maior + Base\, menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\, \pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\, \pi\, r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\, (n\, \theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\, k\, \pi}{n}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1\, p_1 + ... + x_n\, p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1-\mu)^2\, p_1 + ... + (x_n-\mu)^2\, p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada item, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que considera estar correcta.
- Se apresentar mais do que uma letra, a classificação será de zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Seja a um número real maior do que $1.$

Indique qual das expressões seguintes é igual a $\log_a 3 + 2 \log_a 5$

(A) $\log_a 30$ **(B)** $\log_a 40$ **(C)** $\log_a 75$ **(D)** $\log_a 100$

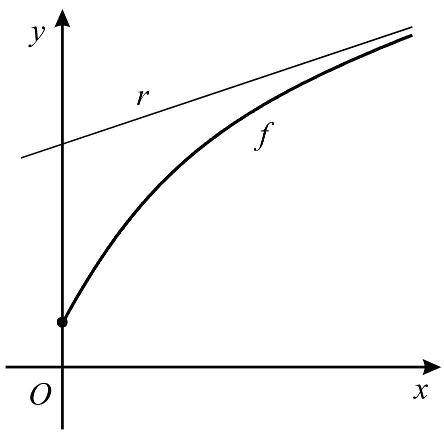
2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $[0, +\infty[$

A recta r, de equação $y = \frac{1}{3}x + 2$, é assimptota do gráfico de f

Seja h a função definida em $[0, +\infty[$ por

$$h(x) = \frac{x}{f(x)}$$

O gráfico de h tem uma assimptota horizontal.



Qual das equações seguintes define essa assimptota?

(A) $y = \frac{1}{3}$ **(B)** $y = \frac{1}{2}$ **(C)** $y = 2$ **(D)** $y = 3$

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, contínua no intervalo $[-2, 2]$

Tem-se $f(-2) = 1$ e $f(2) = 3$

Indique qual das expressões seguintes define uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $]-2, 2[$

(A) $g(x) = x + f(x)$ **(B)** $g(x) = x - f(x)$

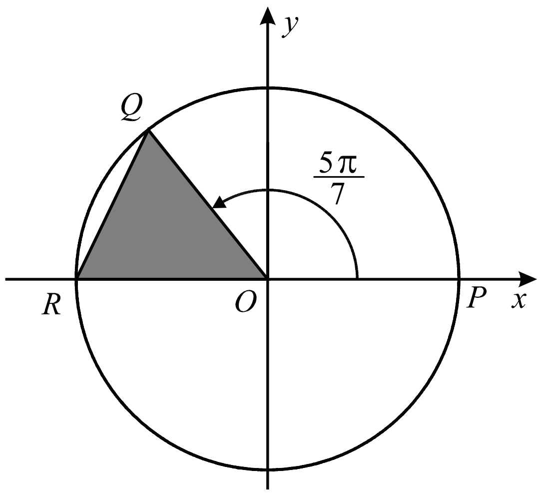
(C) $g(x) = x^2 + f(x)$ **(D)** $g(x) = x^2 - f(x)$

4. Na figura está representado o círculo trigonométrico.

Tal como a figura sugere, O é a origem do referencial, Q pertence à circunferência, P é o ponto de coordenadas $(1, 0)$ e R é o ponto de coordenadas $(-1, 0)$

A amplitude, em radianos, do ângulo POQ é $\frac{5\pi}{7}$

Qual é o valor, arredondado às centésimas, da área do triângulo $[OQR]$?



(A) $0{,}39$ **(B)** $0{,}42$ **(C)** $0{,}46$ **(D)** $0{,}49$

5. Lança-se cinco vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Seja p a probabilidade de, nos cinco lançamentos, sair *face 6* exactamente duas vezes.

Qual é o valor de p arredondado às centésimas?

(A) $0{,}12$ **(B)** $0{,}16$ **(C)** $0{,}23$ **(D)** $0{,}27$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
De dois acontecimentos A e B ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), de probabilidade não nula, sabe-se que:
- $P(A) = P(B)$
- $P(A \cup B) = 5\,P(A \cap B)$

Determine a probabilidade de acontecer A, sabendo que B aconteceu.
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2. Considere o seguinte problema:

Lança-se três vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e multiplicam-se os números saídos. Qual é a probabilidade de o produto obtido ser igual a 6?

Uma resposta correcta a este problema é $\dfrac{3!+3}{6^3}$

Numa pequena composição, explique porquê.
A sua composição deve incluir:
- uma referência à Regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

3. Num lago onde não havia peixes, introduziram-se, num determinado momento, alguns peixes.
Admita que, t anos depois, o número de peixes existentes no lago é dado aproximadamente por

$$f(t) = \frac{2\,000}{1 + k\;e^{-0{,}13\,t}}$$

onde k designa um número real.

3.1. Determine o valor de k, supondo que foram introduzidos 100 peixes no lago.

3.2. Admita agora que $k = 24$.

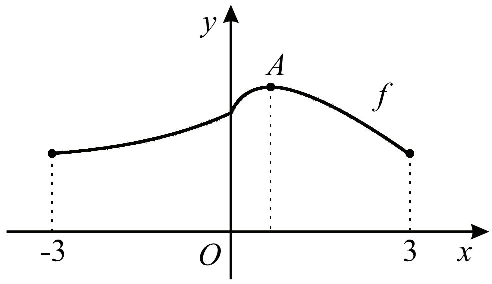
Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:
Ao fim de quantos anos o número de peixes no lago atinge o meio milhar? Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4. Seja f a função de domínio $[-3, 3]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1 + x}{x} & se \quad -3 \leq x < 0 \\ 2 - x + \ln(1+3x) & se \quad 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Na figura está representado o gráfico da função f



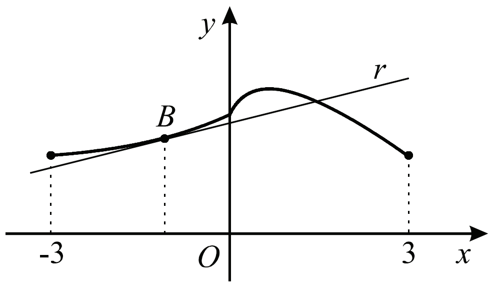
Tal como a figura sugere:
- A é o ponto do gráfico de f de ordenada máxima
- a abcissa do ponto A é positiva

4.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

4.1.1. Determine a abcissa do ponto A.

4.1.2. Mostre que, tal como a figura sugere, f é contínua no ponto 0.

4.2. Na figura está novamente representado o gráfico de f, no qual se assinalou um ponto B, no segundo quadrante.



A recta r é tangente ao gráfico de f, no ponto B.

Considere o seguinte problema:
Determinar a abcissa do ponto B, sabendo que a recta r tem declive 0,23

Traduza este problema por meio de uma equação e, **recorrendo à calculadora**, resolva-a graficamente, encontrando assim um valor aproximado da abcissa do ponto B.

Pode realizar algum trabalho analítico antes de recorrer à calculadora.

Reproduza na sua folha de prova o(s) gráfico(s) obtido(s) na calculadora e apresente **o valor pedido arredondado às centésimas**.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I .... **50 pontos**

Cada resposta certa .... 10 pontos
Cada resposta errada.. 0 pontos
Cada item não respondido ou anulado .... 0 pontos

Grupo II .... **150 pontos**

1. .... 25 pontos

2. .... 20 pontos

3. .... 35 pontos
- **3.1.** ....15 pontos
- **3.2.** ....20 pontos

4. .... 70 pontos
- **4.1.** ....45 pontos
  - **4.1.1.** ....20 pontos
  - **4.1.2.** ....25 pontos
- **4.2.** ....25 pontos

TOTAL .... **200 pontos**