# TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A - 12º ANO

# RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

## GRUPO I

**1.** Nas condições do enunciado, tem-se:

$\log_a x = 1 + 5 \log_a y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a a + \log_a (y^5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_a x = \log_a (a\, y^5) \Leftrightarrow x = a\, y^5$

Resposta **A**

**2.** O gráfico da função $d$, definida por $d(x) = 2 + \operatorname{tg} x$, tem uma infinidade de assimptotas verticais.

Resposta **D**

**3.** $h'(x) = f'(x) + g'(x) = (x^2+1)' + g'(x) = 2x + g'(x)$

Como o gráfico da função $g$ é uma recta, tem-se $g'(x) = b$, sendo $b$ o declive dessa recta, que é negativo.

Logo, $h'(x) = 2x + b$, com $b < 0$.

Resposta **B**

**4.** A linha do Triângulo de Pascal com nove elementos é a linha que contém os elementos da forma ${}^8C_p$ , pelo que o segundo e o penúltimo elementos dessa linha são iguais a $8$. Como o primeiro e o último elementos da linha são iguais a $1$, a linha contém dois elementos iguais a $8$ e dois elementos iguais a $1$, sendo todos os outros maiores do que $8$. Portanto, para o produto dos dois elementos escolhidos ser igual a $8$, é necessário que um deles seja $1$ e o outro seja $8$.

A probabilidade pedida é, portanto, $\dfrac{{}^2C_1 \times {}^2C_1}{{}^9C_2} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

Resposta **B**

**5.** O número complexo $\dfrac{\rho}{2}\, cis\,(2\,\alpha)$ tem, relativamente ao número complexo $\rho\, cis\, \alpha$, metade do módulo e o dobro do argumento.

Resposta **B**

## GRUPO II

**1.** $$\frac{(2+i)^2+1+6\,i^{35}}{1+2\,i} = \frac{4+4\,i+i^2+1+6\,i^3}{1+2\,i} =$$

$$= \frac{4+4\,i-1+1-6\,i}{1+2\,i} = \frac{4-2\,i}{1+2\,i} = \frac{(4-2\,i)\,(1-2\,i)}{(1+2\,i)\,(1-2\,i)} =$$

$$= \frac{4-8\,i-2\,i+4\,i^2}{1-4\,i^2} = \frac{4-8\,i-2\,i-4}{1+4} = \frac{-10\,i}{5} = -2\,i$$

**2.** O acontecimento $A \cap B$ é o acontecimento «*sair número ímpar maior do que 2*».
Ora, dos números 1, 2, 3 e 4, só há um número ímpar maior do que 2, que é o 3.
Portanto, $A \cap B = \{3\}$
Concluímos assim que $P(\{3\}) = 0{,}4$

De $P(A) = P(\overline{A})$ resulta que $P(A) = 0{,}5$ e $P(\overline{A}) = 0{,}5$.
Portanto, como $A = \{1, 3\}$ e como $P(\{3\}) = 0{,}4$, vem $P(\{1\}) = 0{,}1$

Como $A \cup B = \{1, 3, 4\}$ e $P(A \cup B) = 0{,}8$, vem $P(\{1, 3, 4\}) = 0{,}8$,
pelo que $P(\{2\}) = 0{,}2$.

Finalmente, como $P(\overline{A}) = P(\{2, 4\}) = 0{,}5$ e como $P(\{2\}) = 0{,}2$, vem
$P(\{4\}) = 0{,}3$

Tem-se, então, a seguinte tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória $X$:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,3 |

**3.1.** Como o ponto $A$ pertence ao eixo das ordenadas, a sua abcissa é igual a $0$.

Portanto, o declive da recta tangente ao gráfico de $f$, no ponto $A$, é igual a $f'(0)$.

Tem-se que $f'(0) = (2 \times 0 + 4) \times e^0 = 4 \times 1 = 4$

Como o ponto $A$ pertence ao eixo das ordenadas, e a sua ordenada é igual a $1$, tem-se que a recta intersecta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada $1$.

Portanto, a equação reduzida da recta é $y = 4x + 1$

**3.2.** Tem-se: $f''(x) = (2x+4)' \,.\, e^x + (2x+4)\,.\,(e^x)' =$
$= 2\,e^x \;+\; (2x+4)\,e^x = (2x+6)\,e^x$

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (2x+6)\,e^x = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x+6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -3$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\frown$ | $p.i.$ | $\smile$ |

Concluímos assim que o gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\infty,\,-3]$ e voltada para cima no intervalo $[-3,\,+\infty[$ ; o ponto de abcissa $-3$ é ponto de inflexão.

**4.1.** Tem-se:

- $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left[2\,x \,+\, \ln(1+x-x^2)\right] = 2 \,+\, \ln(1) \,= 2+0 = 2$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) \;=\; \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \;\overset{\frac{0}{0}}{=}\; \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} \;=$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} \;=\; \lim_{x \to 1^+} \left(\sqrt{x} \,+\, 1\right) \;=\; \sqrt{1} \,+\, 1 \;=\; 2$$

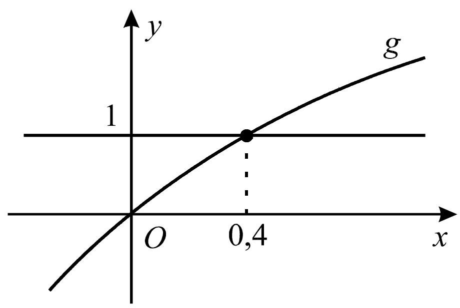
- $g(1) = 2$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = g(1)$ , concluímos que a função é contínua em $x = 1$

**4.2.** Tem-se $g(4) = \dfrac{4-1}{\sqrt{4}-1} \;=\; 3.$ Portanto, $g(x) = -2 + g(4) \;\Leftrightarrow\; g(x) = 1$

Trata-se, assim, de determinar $x$ pertencente a $\left[-\dfrac{1}{2}\,,\,1\right[$ tal que $g(x) = 1$

Na figura está representado o gráfico de $g$, nesse intervalo, bem como a recta de equação $y = 1$. Esta recta intersecta o gráfico de $g$ no ponto assinalado na figura, cuja abcissa, arredondada às décimas, é igual a $0{,}4$.




Portanto, o valor de $x$ pedido é $0{,}4$

**5.1.** Quando $x = 0$, o ponto $P$ coincide com o ponto $A$, pelo que a distância do ponto $Q$ ao ponto $O$ é igual a $3 + 1$, ou seja, é igual a $4$.

Quando $x = \pi$, o ponto $P$ coincide com o ponto $B$, pelo que a distância do ponto $Q$ ao ponto $O$ é igual a $3 - 1$, ou seja, é igual a $2$.

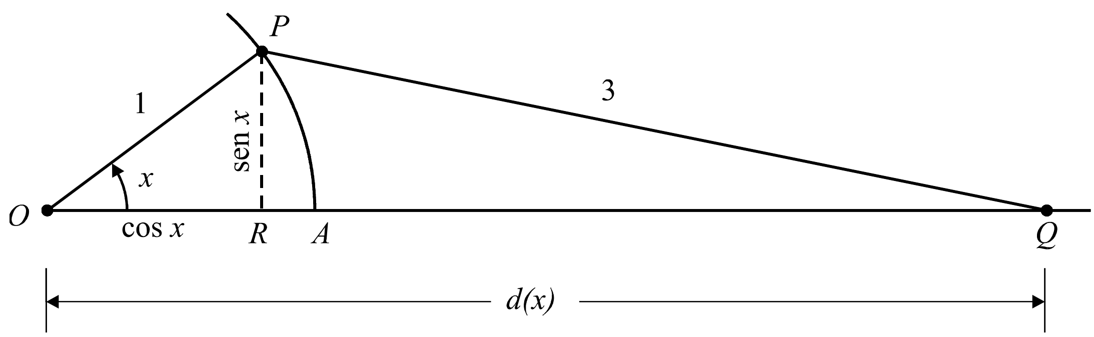
Como $d(0) = 4$ e $d(\pi) = 2$, resulta que se tem, efectivamente, $d(0) = 2\,d(\pi)$, pelo que a afirmação $\mathrm{I}$ é verdadeira.

Quando $x$ varia de $0$ a $\pi$, o ponto $P$ vai de $A$ até $B$, percorrendo, no sentido directo, a semicircunferência que está acima do diâmetro $[AB]$, pelo que o ponto $Q$ se vai aproximando do ponto $O$. Tem-se, assim, que, no intervalo $[0, \pi]$, $d(x)$ diminui à medida que $x$ aumenta, pelo que a função $d$ é estritamente decrescente neste intervalo.

O mesmo não se passa quando $x$ varia de $\pi$ a $2\pi$. Neste caso, o ponto $P$ vai de $B$ até $A$, percorrendo, no sentido directo, a semicircunferência que está abaixo do diâmetro $[AB]$, pelo que o ponto $Q$ se vai afastando do ponto $O$. Portanto, no intervalo $[\pi, 2\pi]$, $d(x)$ aumenta à medida que $x$ aumenta, pelo que a função $d$ é estritamente crescente neste intervalo. Logo, a função derivada, $d'$, não pode ser negativa no intervalo $[\pi, 2\pi]$.

Portanto, a afirmação $\mathrm{II}$ é falsa.

**5.2.** Tem-se, de acordo com a sugestão, $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ}$




Por um lado, tem-se $\overline{OR} = \cos x$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $[PQR]$, vem:

$\overline{RQ}^2 + \operatorname{sen}^2 x = 3^2$ Portanto, $\overline{RQ} = \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 x}$

Donde resulta que $d(x) = \cos x + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 x}$