TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

GRUPO I

1. Uma função contínua em $\mathbb{R}$ não pode passar de valores negativos a valores positivos, ou de valores positivos a valores negativos, sem tomar o valor zero.

Portanto, o conjunto $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ não pode ser o contradomínio de uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$

Resposta **D**

2. O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 2[$ e voltada para baixo em $]2, +\infty[$, tendo um ponto de inflexão para $x = 2$

Portanto, a função f'' é positiva para $x < 2$, é negativa para $x > 2$ e toma o valor zero para $x = 2$

Das quatro expressões apresentadas, a única que define uma função com estas características é a expressão $2 - x$

Resposta **C**

3. $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax^2 + a^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax\,(x + a)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{ax} \times \frac{1}{x + a} \right) = 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

Resposta **A**

4. $7 \times 7 \times 6 = 294$

Resposta **D**

5. Existem ${}^8C_5$ maneiras diferentes de escolher as cinco posições onde pode ser colocada a letra A, na sequência das oito respostas. Para cada uma delas, existem 3 opções para colocar a letra B. As duas opções D ocupam, de modo único, as duas restantes posições.

O número de casos possíveis é, então, ${}^8C_5 \times 3 = 168$

O número de casos favoráveis é 1

Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{1}{168}$

Resposta **C**

GRUPO II

1. $$\frac{(1+2i)(3+i)\,-\,i^6+i^7}{3i} = \frac{3+i+6i+2i^2-i^{4+2}+\,i^{4+3}}{3i} =$$

$$= \frac{3+7i-2-i^2+i^3}{3i} = \frac{1+7i+1-i}{3i} = \frac{2+6i}{3i} =$$

$$= \frac{2+6i}{3i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{-2i-6i^2}{-3i^2} = \frac{6-2i}{3} = 2\,-\,\frac{2}{3}\,i$$

2. $P(\overline{X}\cap\overline{Y}) = P(X)\times P(Y|X) + P(\overline{X}) - P(Y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\overline{X\cup Y}) = P(X)\times\dfrac{P(X\cap Y)}{P(X)} + 1 - P(X) - P(Y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - P(X\cup Y) = P(X\cap Y) + 1 - P(X) - P(Y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(X\cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X\cap Y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(X\cup Y) = P(X\cup Y)$

Portanto, $P(\overline{X}\cap\overline{Y}) = P(X)\times P(Y|X) + P(\overline{X}) - P(Y)$

3.1. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que o seu gráfico não tem assimptotas verticais.

Quanto à existência de assimptotas não verticais, tem-se:

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3+4\,x^2\,e^{-x}}{x} =$$

  $$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x} + \frac{4\,x^2\,e^{-x}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x} + 4\,x\,e^{-x}\right) =$$

  $$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x} + 4\times\frac{x}{e^x}\right) = 0 + 4\times 0 = 0$$

- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 0\times x] = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(3 + 4\,x^2\,e^{-x}) =$$

  $$= \lim_{x\to+\infty}\left(3 + 4\times\frac{x^2}{e^x}\right) = 3 + 4\times 0 = 3$$

Portanto, a recta de equação $y=3$ é assimptota do gráfico da função f

- $$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3 + 4x^2 e^{-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{4x^2 e^{-x}}{x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{x} + 4x e^{-x} \right) =$$

$$= 0 + 4 \times (-\infty) \times e^{+\infty} = 4 \times (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$$

Portanto, o gráfico da função f não tem assimptota não vertical, quando $x \to -\infty$

Conclusão: a recta de equação $y = 3$ é a única assimptota do gráfico da função f

3.2. $f'(x) = (3 + 4x^2 e^{-x})' = (4x^2 e^{-x})' = 8x\, e^{-x} + 4x^2(-e^{-x}) =$
$= 8x\, e^{-x} - 4x^2 e^{-x} = e^{-x}\,(8x - 4x^2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}\,(8x - 4x^2) = 0 \Leftrightarrow 8x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = 2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	*Mín*	$\nearrow$	*Máx*	$\searrow$

Portanto, a função f tem um único mínimo relativo, que é igual a 3 $(f(0) = 3)$

3.3. $g(x) = 0 \Leftrightarrow x + \ln[f(x) - 3] = 0 \Leftrightarrow x + \ln(3 + 4x^2 e^{-x} - 3) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + \ln(4x^2 e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow x + \ln(4x^2) + \ln(e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + \ln(4x^2) - x = 0 \Leftrightarrow \ln(4x^2) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \lor x = \frac{1}{2}$

O domínio de g é $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e, portanto, a função g tem dois zeros: $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

4.1. Tem-se $\operatorname{tg} x = \dfrac{\overline{PB}}{5}$, pelo que $\overline{PB} = 5 \operatorname{tg} x$, donde vem $\overline{PC} = 5 - 5 \operatorname{tg} x$

Tem-se $\cos x = \dfrac{5}{\overline{AP}}$, pelo que $\overline{AP} = \dfrac{5}{\cos x}$

Tem-se $\overline{AC}^{\,2} = 5^2 + 5^2$, pelo que $\overline{AC} = \sqrt{50}$

Portanto, $f(x) = 5 - 5 \operatorname{tg} x + \dfrac{5}{\cos x} + \sqrt{50} = \dfrac{5}{\cos x} - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5$

4.2. $f'(x) = \left(\dfrac{5}{\cos x} - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5 \right)' = \left(\dfrac{5}{\cos x} \right)' - 5 \times (\operatorname{tg} x)' =$

$= \dfrac{-5\,.\,(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} - 5 \times \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{5 \operatorname{sen} x - 5}{\cos^2 x}$

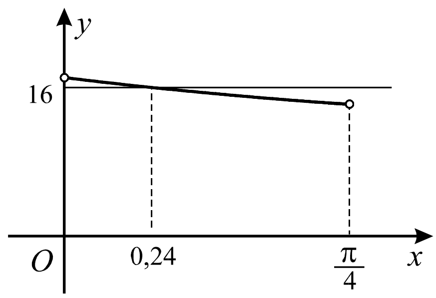
$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) - 5}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{5 \times \frac{1}{2} - 5}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{\frac{5}{2} - \frac{10}{2}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{-\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}} =$

$= -\dfrac{10}{3}$

Portanto, o declive da recta r é $-\dfrac{10}{3}$

4.3. O valor de x para o qual o perímetro do triângulo $[APC]$ é igual a 16 é a solução da equação $f(x) = 16$

Na figura, estão representados o gráfico da função f e a recta de equação $y = 16$, bem como o ponto de intersecção dos dois gráficos. A abcissa desse ponto é a solução da equação $f(x) = 16$



Portanto, o valor de x, arredondado às centésimas, é $0{,}24$