

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 15.03.2010

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

**Na folha de respostas, indique claramente a versão do teste.
A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas
aos itens de escolha múltipla com zero pontos.**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

$\text{cos}(a+b) = \text{cos } a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
- Escreva, na sua folha de respostas, **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$)

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes;
- $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,5$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

- (A) 0,6 (B) 0,7 (C) 0,8 (D) 0,9

2. Qual é o valor de $\log_5 \left(\frac{5^{1000}}{25} \right)$?

- (A) 40 (B) 500 (C) 975 (D) 998

3. Seja g a função, de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 3^x - \sqrt{x} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ x - 5 + \log_2(x - 1) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero da função g ?

- (A) $]0, 1[$ (B) $]1, 3[$ (C) $]3, 5[$ (D) $]5, 9[$

4. Na figura 1, está representada parte do gráfico de uma função f , de domínio \mathbb{R}^+

Tal como a figura sugere, a recta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico de f

Indique o valor de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x)}{x} - f(x) \right]$$

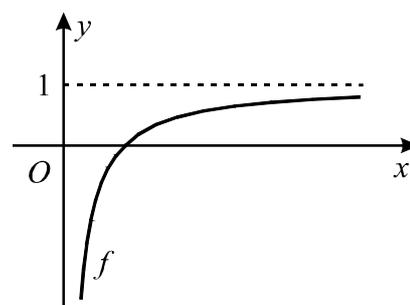


Figura 1

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

5. Na figura 2, está representada parte do gráfico de uma função h , de domínio \mathbb{R}

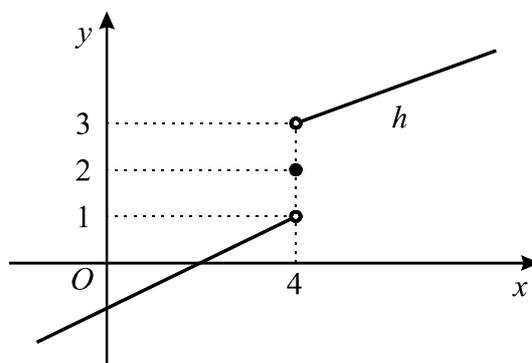


Figura 2

Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = h\left(4 - \frac{1000}{n}\right)$

Qual é o valor de $\lim (u_n)$?

- (A) $-\infty$ (B) 1 (C) 2 (D) 3

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Uma caixa tem seis bolas: três bolas com o número 0 (zero), duas bolas com o número 1 (um) e uma bola com o número 2 (dois). Tiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa e observam-se os respectivos números.

- 1.1. Sejam A e B os acontecimentos:

A : «os números saídos são iguais»

B : «a soma dos números saídos é igual a 1»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$? Justifique a sua resposta.

- 1.2. Seja X a variável aleatória «**produto dos números saídos**».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X

Apresente cada uma das probabilidades na forma de fracção irredutível.

2. Uma professora de Matemática propôs o seguinte problema aos seus alunos:

Uma turma tem 25 alunos, dos quais 15 são rapazes e 10 são raparigas. Pretende-se formar uma comissão com dois alunos do mesmo sexo.

Quantas comissões diferentes se podem formar?

Apresentam-se, em seguida, as respostas da Rita e do André a este problema.

Resposta da Rita: ${}^{15}C_2 \times {}^{10}C_2$

Resposta do André: ${}^{25}C_2 - 15 \times 10$

Apenas uma das respostas está correcta.

Elabore uma composição na qual:

- identifique a resposta correcta;
- explique o raciocínio que conduz à resposta correcta;
- proponha uma alteração na expressão da resposta incorrecta, de modo a torná-la correcta;
- explique, no contexto do problema, a razão da alteração.

3. Seja f a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-\sqrt{2x}} & \text{se } 0 < x < 2 \\ x e^{-x} + x + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Resolva, **usando exclusivamente métodos analíticos**, os itens 3.1. e 3.2.

- 3.1. Averigúe se a função f é contínua em $x = 2$

- 3.2. O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua.

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

- 3.3. Seja g a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = 3 + \ln(x)$

A equação $f(x) = g(x)$ tem exactamente duas soluções.

Determine essas soluções, **utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora**.

Apresente as soluções arredondadas às centésimas.

Apresente os gráficos que obteve na calculadora e assinale os pontos relevantes.

4. Numa certa região, uma doença está a afectar gravemente os coelhos que lá vivem. Em consequência dessa doença, o número de coelhos existentes nessa região está a diminuir.

Admita que o número, em **milhares**, de coelhos que existem nessa região, t **semanas** após a doença ter sido detectada, é dado aproximadamente por

$$f(t) = \frac{k}{3 - 2e^{-0,13t}} \quad (k \text{ designa um número real positivo})$$

Resolva, **usando exclusivamente métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

- 4.1. Suponha que $k = 10$

Ao fim de quantos **dias**, após a doença ter sido detectada, é que o número de coelhos existentes na referida região é igual a 9 000 ?

- 4.2. Admita agora que o valor de k é desconhecido.

Sabe-se que, durante a primeira semana após a detecção da doença, morreram dois mil coelhos e não nasceu nenhum.

Determine o valor de k , arredondado às décimas.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I (5 × 10 pontos) **50 pontos**

GRUPO II **150 pontos**

1. 35 pontos

1.1. 15 pontos

1.2. 20 pontos

2. 15 pontos

3. 60 pontos

3.1. 20 pontos

3.2. 20 pontos

3.3. 20 pontos

4. 40 pontos

4.1. 20 pontos

4.2. 20 pontos

Total **200 pontos**