Proposta de Exame Nacional

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: Caderno 1: 75 minutos (+ 15 minutos de tolerância)

Caderno 2: 75 minutos (+ 15 minutos de tolerância)

Data:

Caderno 1

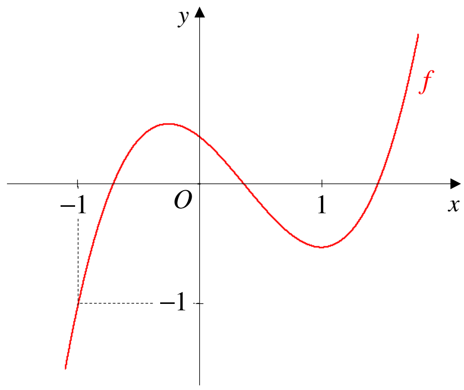
(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

1. Na figura está representada parte do gráfico de uma função *f*, polinomial do 3.º grau.

Sabe-se que $f(1)$ é um extremo relativo de f.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?



(A) $f(-1) < f(1) < f''(1) < f'(1)$

(B) $f'(-1) < f(1) < f'(1) < f''(1)$

(C) $f(-1) < f(1) < f'(1) < f''(1)$

(D) $f''(-1) < f'(-1) < f'(1) < f''(1)$

2. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas por quatro naipes (espadas, copas, ouros e paus). Em cada naipe há 13 cartas: três figuras (rei, dama e valete) e mais 10 cartas.

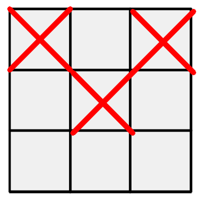
2.1. Utilizando apenas as 12 figuras (quatro reis, quatro damas e quatro valetes), quantas sequências diferentes de 12 cartas se podem formar de modo que os reis fiquem seguidos e os valetes também fiquem seguidos?

2.2. Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, oito cartas de um baralho completo.

Qual é a probabilidade de, entre as oito cartas retiradas, haver quatro e só quatro cartas de espadas e uma e uma só figura?

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

3. Considere um tabuleiro quadrado dividido em 3×3 casas quadradas iguais. Selecionam-se, ao acaso, três das nove casas do tabuleiro. Nas casas escolhidas é colocada uma cruz formada pelas diagonais dessa casa.



Qual é a probabilidade de os centros das casas escolhidas ficarem alinhados?

(A) $\frac{2}{21}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{28}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

4. Um dos termos do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^{12}$, com $x > 0$, não depende da variável x.

Qual é esse termo?

(A) -7920 **(B)** 7920 **(C)** -1760 **(D)** 1760

5. Um medicamento foi administrado a uma pessoa às 10 horas da manhã de determinado dia.
A concentração desse medicamento, em miligramas por litro de sangue, t horas após ter sido administrado, é dada, para determinado valor de k, por:

$$C(t) = 10\left(e^{-kt} - e^{-0,4t}\right), \ t > 0$$

Resolva as duas alíneas seguintes por processos exclusivamente analíticos. A calculadora pode ser usada em eventuais cálculos numéricos.

5.1. Sabendo que $2e^{-0,4t} - 0,2C(t) = C'(t)$, mostre que $k = 0,2$.

5.2. Determine o valor de t para o qual é máxima a concentração do medicamento no sangue da pessoa e indique a que horas se verificou a concentração máxima (apresente o resultado em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades).

6. De uma sucessão (u_n) sabe-se que $u_1 = a$, com $a \neq 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n$.

Qual é o valor de $\frac{u_{1000}}{u_{1002}}$?

(A) 25 **(B)** $\frac{1}{25}$ **(C)** $25a$ **(D)** $\frac{a}{25}$

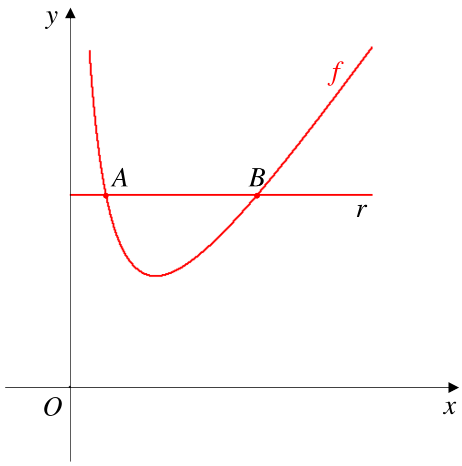
7. Considere a função f , definida em $\mathbb{R}^+$ por $f\left(x\right)=\dfrac{(\ln x)^2}{2}+x$.

7.1. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

7.2. Na figura estão representadas, num referencial ortonormado xOy , parte do gráfico da função f e uma reta r paralela ao eixo Ox .

Sabe-se que:

- a reta r interseta o gráfico de f nos pontos A e B ;
- a abcissa do ponto A pertence ao intervalo $]0,2[$;
- a distância de A a B é igual a 1.



Seja a a abcissa do ponto A .

Determine o valor de a recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir num referencial o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- indicar o valor de a , com arredondamento às centésimas.

Fim do Caderno 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

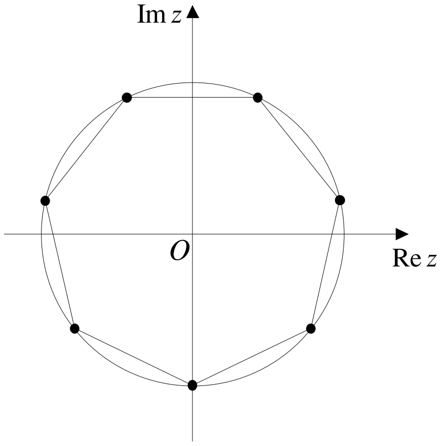
Item										
Cotação (em pontos)										
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**6**	**7.1.**	**7.2.**	
5	10	15	5	5	10	15	5	15	15	**100**

Caderno 2

(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

8. Na figura, está representado, no plano complexo, um polígono regular inscrito numa circunferência de raio 1 e centro na origem do referencial. Um dos vértices do polígono pertence ao eixo imaginário.



Qual das seguintes equações tem por soluções os números complexos cujos afixos são os vértices do polígono?

(A) $z^6 + \mathrm{i} = 0$ **(B)** $z^6 - \mathrm{i} = 0$

(C) $z^7 + \mathrm{i} = 0$ **(D)** $z^7 - \mathrm{i} = 0$

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$ e $w = \sqrt{3}z - \mathrm{i}\,z$.

9.1. Mostre que, qualquer que seja o número inteiro k:

$$z^k + z^{-k} = 2\cos(k\alpha)$$

9.2. Determine os valores de α pertencentes ao intervalo $]-\pi, \pi]$, para os quais o número complexo w é um número imaginário puro.

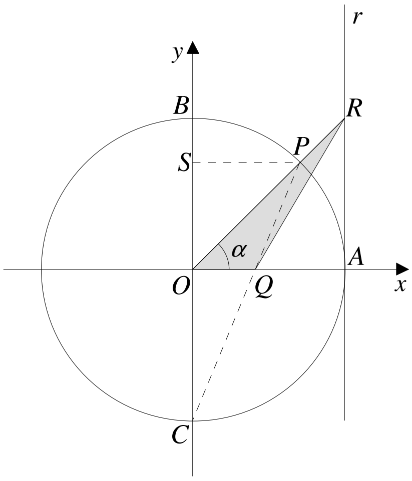
10. Considere a função de domínio f , de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

11. Na figura estão representados, num referencial ortonormado *xOy*, a circunferência de centro na origem e raio 1, assim como a reta *r* de equação $x=1$.



Sabe-se que:

- os pontos *A*, *B* e *C* têm coordenadas $(1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$, respetivamente;
- o ponto *P* se desloca sobre o arco *AB*, nunca coincidindo com *A* nem com *B*;
- a reta *OP* interseta a reta *r* no ponto *R*;
- a reta *CP* interseta o eixo *Ox* no ponto *Q*;
- o ponto *S* pertence ao eixo *Oy* e é tal que o segmento [*SP*] é paralelo ao eixo *Ox*.

Para cada posição do ponto *P*, seja α a amplitude, em radianos, do ângulo *AOP* $\left(\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

e seja $A(\alpha)$ a medida da área do triângulo [*OQR*].

11.1. Mostre que $A(\alpha)=\frac{\tan\alpha\cos\alpha}{2(1+\sin\alpha)}$.

Sugestão: Recorra ao Teorema de Tales ou à semelhança de triângulos para exprimir o comprimento de [*OQ*] em função de α .

11.2. Determine $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-} A(\alpha)$ e interprete o resultado obtido no contexto do problema.

12. Considere a função f definida, para determinado $a \in \mathbb{R}$, por $f(x) = \dfrac{8}{3^{ax}+1}$.

Sabendo que o ponto $P(2\,,3)$ pertence ao gráfico da função inversa de f, qual é o valor de a?

(A) $\log_3 \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ **(B)** $\log_3 \sqrt{5} - 1$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** $\dfrac{1}{3}$

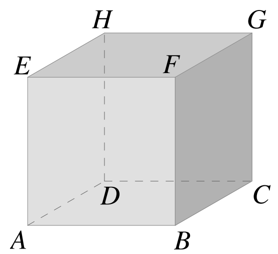
13. Sabe-se que, num referencial ortonormado *Oxyz*:

- o ponto *P* pertence ao eixo Oz e tem cota a;
- o ponto *Q* pertence ao eixo Oy e tem ordenada $a+1$;
- o vetor $\vec{u}$ tem coordenadas $(2\,,-6\,,-3)$;
- os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são perpendiculares.

Qual é o valor de a?

(A) $\dfrac{3}{2}$ **(B)** $-\dfrac{3}{2}$ **(C)** -2 **(D)** 3

14. Fixado um referencial cartesiano do espaço, *Oxyz*, considere o cubo [*ABCDEFGH*].



Sabe-se que os vértices *A* e *E* têm coordenadas $(0, 0, -3)$ e $(-1, 2, -1)$, respetivamente.

14.1. Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta *EO* com o plano *ABC*.

14.2. Designando por α a amplitude do ângulo *AEO*, determine $\cos(2\alpha)$.

Fim da prova

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item										
Cotação (em pontos)										
8.	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**11.1.**	**11.2.**	**12.**	**13.**	**14.1.**	**14.2.**	
5	10	15	5	15	10	5	5	15	15	**100**
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)										**200**

Proposta de resolução

Caderno 1

1. $f(-1)=-1<f(1)<0$; $f'(-1)>0$; $f''(-1)<0$

$f'(1)=0$; $f''(1)>0$

(A) $f(-1)\underset{V}{<}f(1)\underset{V}{<}f''(1)\underset{F}{<}f'(1)$ **(F)**

(B) $f'(-1)\underset{F}{<}f(1)<f'(1)<f''(1)$ **(F)**

(C) $f(-1)\underset{V}{<}f(1)\underset{V}{<}f'(1)\underset{V}{<}f''(1)$ **(V)**

(D) $f''(-1)\underset{V}{<}f'(-1)\underset{F}{<}f'(1)<f''(1)$ **(F)**

Resposta: (C)

2. **2.1.** $4!\times 4!\times 6!=414\,720$

$6!$ → Número de maneiras de ordenar as quatro damas mais os dois blocos de cartas formados pelos reis e pelos valetes

$4!$ (segundo) → Número de maneiras de ordenar os quatro valetes

$4!$ (primeiro) → Número de maneiras de ordenar os quatro reis

2.2. Número de casos possíveis: ${}^{52}C_8$

Número de casos favoráveis:

Há duas maneiras de compor o conjunto de oito cartas de forma a ter quatro e só quatro cartas de espadas e uma e uma só figura:

Espadas não figuras (10)	Figuras de espadas (3)	Outras figuras (9)	Outras cartas (30)	Total
4	0	1	3	8
3	1	0	4	8

Portanto, o número de casos favoráveis é dado por:

$$^{10}C_4\times {}^{3}C_0\times {}^{9}C_1\times {}^{30}C_3+{}^{10}C_3\times {}^{3}C_1\times {}^{9}C_0\times {}^{30}C_4=$$

$$={}^{10}C_4\times 9\times {}^{30}C_3+{}^{10}C_3\times 3\times {}^{30}C_4$$

Probabilidade pedida: $\dfrac{{}^{10}C_4\times 9\times {}^{30}C_3+{}^{10}C_3\times 3\times {}^{30}C_4}{{}^{52}C_8}\approx 0{,}023$

3. Número de casos possíveis: ${}^{9}C_3=\dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2}=3\times 4\times 7=84$

Número de casos favoráveis: $3+3+2=8$ (3 linhas, 3 colunas e 2 diagonais)

$$P=\frac{8}{84}=\frac{2}{21}$$

Resposta: (A)

4. $\left(\frac{2}{x}-\sqrt{x}\right)^{12}=\sum_{p=0}^{12}{}^{12}C_p\left(\frac{2}{x}\right)^{12-p}\left(-\sqrt{x}\right)^p$

$$T_{p+1}={}^{12}C_p\left(\frac{2}{x}\right)^{12-p}\left(-\sqrt{x}\right)^p={}^{12}C_p 2^{12-p}x^{-12+p}(-1)^p\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^p=$$

$$={}^{12}C_p\times 2^{12-p}\times(-1)^p x^{-12+p}x^{\frac{p}{2}}=$$

$$={}^{12}C_p\times 2^{12-p}\times(-1)^p x^{-12+p+\frac{P}{2}}$$

$$={}^{12}C_p\times 2^{12-p}\times(-1)^p x^{-12+\frac{3p}{2}}$$

$$-12+\frac{3p}{2}=0\Leftrightarrow\frac{3p}{2}=12\Leftrightarrow 3p=24\Leftrightarrow p=8$$

$$T_{8+1}={}^{12}C_8\times 2^{12-8}\times(-1)^8 x^{-12+\frac{3\times 8}{2}}=495\times 2^4\times 1\times x^0=7920$$

Resposta: (B)

5. **5.1.** $C(t)=10\left(\mathrm{e}^{-kt}-\mathrm{e}^{-0,4t}\right)$

$$C'(t)=10\left(\mathrm{e}^{-kt}-\mathrm{e}^{-0,4t}\right)'=10\left[\left(\mathrm{e}^{-kt}\right)'-\left(\mathrm{e}^{-0,4t}\right)'\right]=$$

$$=10\left(-k\,\mathrm{e}^{-kt}+0,4\mathrm{e}^{-0,4t}\right)$$

$$2\mathrm{e}^{-0,4t}-0,2C(t)=2\mathrm{e}^{-0,4t}-0,2\times 10\left(\mathrm{e}^{-kt}-\mathrm{e}^{-0,4t}\right)=$$

$$=2\mathrm{e}^{-0,4t}-2\left(\mathrm{e}^{-kt}-\mathrm{e}^{-0,4t}\right)=$$

$$=2\mathrm{e}^{-0,4t}-2\mathrm{e}^{-kt}+2\mathrm{e}^{-0,4t}=$$

$$=4\mathrm{e}^{-0,4t}-2\mathrm{e}^{-kt}$$

$$2\mathrm{e}^{-0,4t}-0,2C(t)=C'(t)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\mathrm{e}^{-0,4t}-2\mathrm{e}^{-kt}=10\left(-k\,\mathrm{e}^{-kt}+0,4\,\mathrm{e}^{-0,4t}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\mathrm{e}^{-0,4t}-2\mathrm{e}^{-kt}=-10k\,\mathrm{e}^{-kt}+4\mathrm{e}^{-0,4t}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\mathrm{e}^{-kt}=-10k\,\mathrm{e}^{-kt}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2=-10k\Leftrightarrow k=0,2$$

5.2. $C(t)=10\left(\mathrm{e}^{-0,2t}-\mathrm{e}^{-0,4t}\right)$

$$C'(t)=10\left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}+0,4\mathrm{e}^{-0,4t}\right)$$

$$C'(t)=0\Leftrightarrow 10\left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}+0,4\mathrm{e}^{-0,4t}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,2\mathrm{e}^{-0,2t}+0,4\mathrm{e}^{-0,4t}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,2\mathrm{e}^{-0,2t}=0,4\mathrm{e}^{-0,4t}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,2t}=2\mathrm{e}^{-0,4t}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-0,2t}}{e^{-0,4t}} = 2 \Leftrightarrow e^{-0,2t+0,4t} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{0,2t} = 2 \Leftrightarrow 0,2t = \ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{5}t = \ln 2 \Leftrightarrow t = 5\ln 2$$

t	0		$5\ln 2$	$+\infty$
C'		+		–
C		↗	Máx.	↘

A concentração é máxima para $t = 5\ln 2$ h.

$5\ln 2$ h $\approx 3,466$ h $\approx$ 3 h 28 min

10 h + 3 h 28 min = 13 h 28 min

A concentração do medicamento no sangue foi máxima às 13 h 28 min.

6. Se $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n$, então (u_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{5}$.

Logo, $u_n = u_1 \times r^{n-1}$, ou seja, $u_n = a \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$$\frac{u_{1000}}{u_{1002}} = \frac{a \times \left(\frac{1}{5}\right)^{1000-1}}{a \times \left(\frac{1}{5}\right)^{1002-1}} \underset{a\neq 0}{=} \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{999}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{1001}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{999-1001} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25$$

Resposta: (A)

7. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + x$

7.1. $f'(x) = \frac{1}{2}\left[(\ln x)^2\right]' + x' = \frac{1}{2} \times 2(\ln x)(\ln x)' + 1 =$

$$= (\ln x) \times \frac{1}{x} + 1 = \frac{\ln x}{x} + 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{\ln x}{x} + 1\right)' = \frac{(\ln x)' x - (\ln x) x'}{x^2} + 0 =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

x	0		e	$+\infty$
f''		$+$	0	$-$
f		$\cup$		$\cap$
			P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, \text{e}[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]\text{e}, +\infty[$.

O ponto do gráfico de abcissa **e** é um ponto de inflexão.

7.2. Se a é a abcissa do ponto A e $\overline{AB} = 1$, então a abcissa de B é $a+1$.

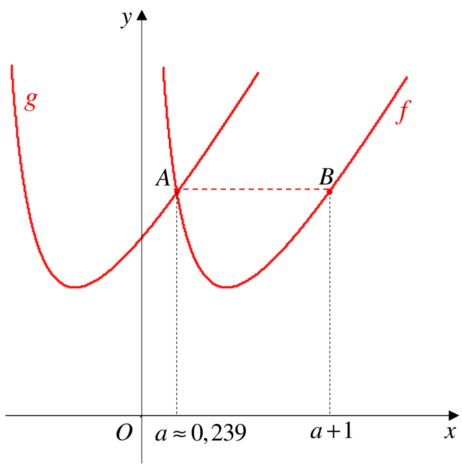
Como A e B têm a mesma ordenada, temos que a é o valor do intervalo $]0, 2[$ tal que $f(a) = f(a+1)$, ou seja, $a \in]0, 2[$ é a solução da equação $f(x+1) = f(x)$.

Resolvemos esta equação recorrendo à calculadora gráfica.

Na figura está representada parte dos gráficos das funções:

$$y_1 = f(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + x$$

$$y_2 = g(x) = f(x+1) = \frac{(\ln(x+1))^2}{2} + x + 1$$



A abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos é o valor de a pretendido.

Assim, $a \approx 0,24$.

Caderno 2

8. O polígono é um heptágono. Logo, a equação tem sete soluções ((C) ou (D)).

O número $-\text{i}$ é uma das soluções.

$(-\text{i})^7 = -\text{i}^{4+3} = -(\text{i}^4 \times \text{i}^3) = -1 \times (-\text{i}) = \text{i}$

$(-\text{i})^7 + \text{i} = \text{i} + \text{i} = 2\text{i}$; $-\text{i}$ não é solução da equação $z^7 + \text{i} = 0$

$(-\text{i})^7 - \text{i} = \text{i} - \text{i} = 0$; $-\text{i}$ é solução da equação $z^7 - \text{i} = 0$

Resposta: (D)

9. **9.1.** $z=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$

$$z^k+z^{-k}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^k+\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^{-k}=$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-k\alpha)}=$$

$$=\cos(k\alpha)+\mathrm{i}\sin(k\alpha)+\cos(-k\alpha)+\mathrm{i}\sin(-k\alpha)=$$

$$=\cos(k\alpha)+\mathrm{i}\sin(k\alpha)+\cos(k\alpha)-\mathrm{i}\sin(k\alpha)=$$

$$=\cos(k\alpha)+\cos(k\alpha)=$$

$$=2\cos(k\alpha)$$

9.2. $w=\sqrt{3}z-\mathrm{i}z=z\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)$

Seja $u=\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

$\|u\|=\sqrt{3+1}=2$

Se $\theta=\operatorname{Arg}u$, $\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Como $\theta\in$ 4.º quadrante, vem $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$.

Portanto, $u=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

$$w=\sqrt{3}z-\mathrm{i}z=z\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\times2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}$$

O número complexo w é um número imaginário puro se e só se:

$$\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha=\frac{2\pi}{3}+k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

Logo, os valores de α pertencentes ao intervalo $\left]-\pi\,,\,\pi\right]$ para os quais o número complexo w é um número imaginário puro são $-\dfrac{\pi}{3}$ (para $k=-1$) e $\dfrac{2\pi}{3}$ (para $k=0$).

10. $$\lim u_n=\lim\left[\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right]\overset{(0\times\infty)}{=}\lim\frac{\ln n^{-1}}{n}=\lim\frac{-\ln n}{n}=-\lim\frac{\ln n}{n}=0^-$$

$\lim f(u_n)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$ porque $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$.

Resposta: (A)

11. **11.1.** $\overline{SP}=\cos\alpha$

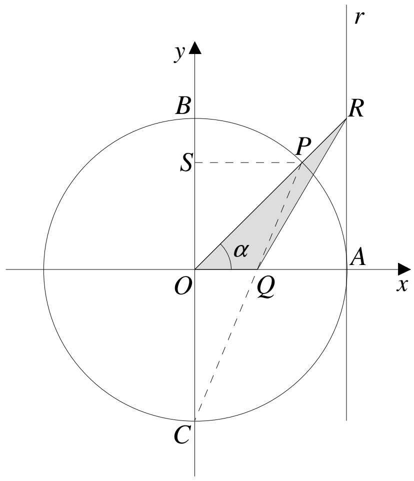
$\overline{OS}=\sin\alpha$

$\overline{CS}=1+\sin\alpha$

$\overline{AR}=\tan\alpha$

Como SP é paralela a OQ, temos, pelo Teorema de Tales:

$$\frac{\overline{SP}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{CS}}{\overline{CO}} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\overline{OQ}}=\frac{1+\sin\alpha}{1} \Leftrightarrow \overline{OQ}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$$



$$\text{Área}_{[OQR]}=\frac{\text{base}\times\text{altura}}{2}=\frac{1}{2}\times\overline{OQ}\times\overline{AR}=$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\times\tan\alpha=\frac{\tan\alpha\cos\alpha}{2(1+\sin\alpha)}$$

$$A(\alpha)=\frac{\tan\alpha\cos\alpha}{2(1+\sin\alpha)}$$

11.2. $A(\alpha)=\dfrac{\tan\alpha\cos\alpha}{2(1+\sin\alpha)}\,,\ \left(\alpha\in\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-} A(\alpha)=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan\alpha\cos\alpha}{2(1+\sin\alpha)}\overset{(\infty\times 0)}{=}\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\cos\alpha}{2(1+\sin\alpha)}=$$

$$=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin\alpha}{2(1+\sin\alpha)}=\frac{1}{2\times(1+1)}=\frac{1}{4}$$

Quando $\alpha\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$, a medida da base $[OQ]$ do triângulo tende para 0 e a medida da altura $[AR]$ tende para $+\infty$. Levantada a indeterminação, verifica-se que a medida da área tende para $\frac{1}{4}$ quando $\alpha\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$.

12. Se o ponto $P(2\,,3)$ pertence ao gráfico da função inversa de f, então $f^{-1}(2)=3$, pelo que $f(3)=2$.

$$f(3)=2 \Leftrightarrow \frac{8}{3^{a\times 3}+1}=2 \Leftrightarrow 8=2\times 3^{3a}+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\times 3^{3a}=6 \Leftrightarrow 3^{3a}=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{3a}=3^1 \Leftrightarrow 3a=1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$$

Resposta: (D)

13. $P(0\,,0\,,a)$; $Q(0\,,a+1\,,0)$

$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(0\,,a+1\,,-a)$

$\vec{u}=(2\,,-6\,,-3)$

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \Leftrightarrow (2\,,-6\,,-3)\cdot(0\,,a+1\,,-a)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6(a+1)+3a=0 \Leftrightarrow -6a-6+3a=0 \Leftrightarrow -3a=6 \Leftrightarrow a=-2$

Resposta (C)

14. **14.1.** $A(0,0,-3)$ e $E(-1,2,-1)$

$\overrightarrow{EA}=A-E=(0,0,-3)-(-1,\ 2,\ -1)=(1,-2,\ -2)$

O plano *ABC* passa em $A(0,0,-3)$ e o vetor $\overrightarrow{EA}(1,-2,-2)$ é normal a esse plano.

Uma equação do plano *ABC* é:

$1(x-0)-2(y-0)-2(z+3)=0 \Leftrightarrow x-2y-2z-6=0$

$\overrightarrow{EO}=O-E=(0,0,0)-(-1,2,\ -1)=(1,-2,\ 1)$

Equação vetorial da reta *EO*:

$(x,y,z)=(0,0,0)+k(1,-2,\ 1)\ ,\ k\in\mathbb{R}$

Dado que $(x,y,z)=(0,0,0)+k(1,-2,\ 1)\Leftrightarrow(x,y,z)=(k,-2k,\ k)$, qualquer ponto da reta *EO* tem coordenadas da forma $(k,-2k,\ k)$, com $k\in\mathbb{R}$.

O ponto *I*, de interseção da reta *EO* com o plano *ABC* , é o ponto da reta cujas coordenadas satisfazem a equação $x-2y-2z-6=0$.

Então:

$k-2\times(-2k)-2k-6=0\Leftrightarrow k+4k-2k-6=0\Leftrightarrow 3k=6\Leftrightarrow k=2$

Se $k=2$, $(k,-2k,\ k)=(2,-4,\ 2)$, pelo que o ponto *I* tem coordenadas $(2,-4,\ 2)$.

14.2. O ângulo *AEO* é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{EA}$ e $\overrightarrow{EO}$.

$\overrightarrow{EA}=(1,-2,\ -2)$; $\overrightarrow{EO}=(1,-2,\ 1)$

$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EO}=(1,-2,\ -2)\cdot(1,-2,\ 1)=1+4-2=3$

$\|\overrightarrow{EA}\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{1+4+4}=3$

$\|\overrightarrow{EO}\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EO}}\right)=\frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EO}}{\|\overrightarrow{EA}\|\times\|\overrightarrow{EO}\|}$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{3\times\sqrt{6}}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha&=\\ =\cos^2\alpha-\sin^2\alpha&=\\ =\cos^2\alpha-\left(1-\cos^2\alpha\right)&=\\ =2\cos^2\alpha-1&=\\ =2\times\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2-1=2\times\frac{1}{6}-1&=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$