Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

Operações com funções racionais

1. Seja h a função de domínio $]-1, +\infty[$, tal que $h(x) = \frac{x-2}{x+1}$ e r a função racional definida por $r(x) = \frac{x^2-4x+4}{1-x^2}$.

   Caracterize as funções $h + r$ e $\frac{h}{r}$.

2. Caracterize, em cada uma das alíneas seguintes, $f \circ g$ e $g \circ f$ e, em cada caso, diga se f e g são permutáveis.

   2.1. $f(x) = \frac{1}{x} \quad e \quad g(x) = \frac{1-x}{x+1}$

   2.2. $f(x) = \frac{2x}{x-1} \quad e \quad g(x) = \frac{x}{x-2}$

3. Três torneiras podem ser utilizadas para encher determinado recipiente.

   Com uma delas consegue-se encher o recipiente em 8 horas, com a segunda em 4 horas e com a terceiras em t horas.

   Se as três torneiras funcionarem simultaneamente, prove que a expressão do número de horas, h necessárias para que o recipiente fique cheio é dada por:

$$h(t) = \frac{8t}{3t+8}, t > 0$$

4. Determine os zeros e estude o sinal de cada função cuja expressão analítica se indica:

   4.1. $f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1} + 5$

   4.2. $g(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{4}{x^2-1}$

   4.3. $h(x) = \frac{x^2+3x+2}{x-3} \times \frac{2-x}{x+1}$

   4.4. $i(x) = \frac{x^3+6x^2+9x}{4-x^2}$

5. Considere as funções f e g, reais de variável real, definidas, respetivamente, por:

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{1-4x^2} \quad e \quad g(x) = \frac{x-2}{2x+1}$$

   5.1. Mostre que $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+1}{1-2x}, \forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

   5.2. Resolva, em $\mathbb{R}$, $(f+g)(x) \leq \frac{1}{3}$.

Soluções

1.

$$(h + r)(x) = \frac{x-2}{x+1} + \frac{x^2-4x+4}{1-x^2} = \frac{-x^2+3x-2}{1-x^2} + \frac{x^2-4x+4}{1-x^2} = \frac{-x+2}{1-x^2}$$

$$D_{h+r} = D_h \cap D_r =]-1, +\infty[\setminus\{1\}$$

$$\frac{h}{r}(x) = \frac{\frac{x-2}{x+1}}{\frac{x^2-4x+4}{1-x^2}} = \frac{(x-2)(1-x^2)}{(x+1)(x^2-4x+4)} = \frac{1-x}{x-2}$$

$$D_{\frac{h}{r}} = D_h \cap D_r\setminus\{x \in \mathbb{R}: r(x) = 0\} = D_h \cap D_r\setminus\{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x + 4 = 0\} =]-1, +\infty[\setminus\{1, 2\}$$

2.

2.1.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1-x}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{1-x}{x+1}} = \frac{x+1}{1-x}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g: g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}: \frac{1-x}{x+1} \neq 0\right\} = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{x-1}{1+x}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f: f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: \frac{1}{x} \neq -1\right\} = \mathbb{R}\setminus\{-1, 0\}$$

Portanto, as funções f e g não são permutáveis.

2.2.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{\frac{2x}{x-2}}{\frac{x}{x-2} - 1} = \frac{\frac{2x}{x-2}}{\frac{x-x+2}{x-2}} = x$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g: g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}: \frac{x}{x-2} \neq 1\right\} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x}{x-1} - 2} = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x-2x+2}{x-1}} = x$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f: f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}: \frac{2x}{x-1} \neq 1\right\} = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$$

Tem-se que as expressões analíticas de $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$ são iguais, mas $D_{f \circ g} \neq D_{g \circ f}$; logo, as funções não são permutáveis.

3.

A primeira torneira enche $\frac{1}{8}$ do recipiente por hora; a segunda enche $\frac{1}{4}$ por hora; e a terceira enche $\frac{1}{t}$.

Assim, as três torneiras em simultâneo enchem a seguinte fração do recipiente:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{t}=\frac{t+2t+8}{8t}=\frac{3t+8}{8t}$$

Logo, o número de horas necessárias para encher o recipiente é dado por:

$$h(t)=\frac{1}{\frac{3t+8}{8t}}=\frac{8t}{3t+8}$$

4.

4.1.

$$\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+1}+5=\frac{2x+2-3x+3+5x^2-5}{x^2-1}=\frac{-x+5x^2}{x^2-1}$$

Tem-se que:

$-x+5x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{1}{5}$

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$

x	$-\infty$	-1		0		$\frac{1}{5}$		1	$+\infty$
$-x+5x^2$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{-x+5x^2}{x^2-1}$	$+$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$	n.d.	$+$

Zeros: 0 e $\frac{1}{5}$

Positiva em $]-\infty, -1[\, \cup \left]0, \frac{1}{5}\right[\cup\,]1, +\infty[$ e negativa em $]-1, 0[\, \cup \left]\frac{1}{5}, 1\right[$.

4.2.

$$\frac{1}{1-x}+\frac{4}{x^2-1}=\frac{-1}{x-1}+\frac{4}{(x-1)(x+1)}=\frac{-x-1+4}{x^2-1}=\frac{-x+3}{x^2-1}$$

Tem-se que:

$-x+3=0 \Leftrightarrow x=3$

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$

Assim:

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$-x+3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-x+3}{x^2-1}$	$+$	n.d.	$-$	n.d.	$+$	0	$-$

Zeros: 3

Positiva em $]-\infty, -1[\, \cup\,]1, 3[$ e negativa em $]-1, 1[\, \cup\,]3, +\infty[$.

4.3.

$$\frac{x^2+3x+2}{x-3}\times\frac{2-x}{x+1}=\frac{(x+1)(x+2)}{x-3}\times\frac{2-x}{x+1}=\frac{4-x^2}{x-3}$$

Tem-se que:

$4-x^2=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$

$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Assim:

x	$-\infty$	-2		-1		2		3	$+\infty$
$4-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{4-x^2}{x-3}$	$+$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.	$-$

Zeros: -2 e 2

Positiva em $]-\infty, -2[\cup]2, 3[$ e negativa em $]-2, -1[\cup]-1, 2[\cup]3, +\infty[$.

4.4.

Tem-se que:

$x^3+6x^2+9x=0 \Leftrightarrow x(x^2+6x+9)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-3$

$4-x^2=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

Assim:

x	$-\infty$	-3		-2		0		2	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2+6x+9	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^3+6x^2+9x	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$4-x^2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{x^3+6x^2+9x}{4-x^2}$	$+$	0	$+$	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.	$-$

Zeros: -3 e 0

Positiva em $]-\infty, -3[\cup]-3, -2[\cup]0, 2[$ e negativa em $]-2, 0[\cup]2, +\infty[$.

5.

5.1.

$1-4x^2=0 \Leftrightarrow 1-2x=0 \vee 1+2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=-\frac{1}{2}$

$2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Logo, $D_f=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ e $D_g=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Tem-se que:

$D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g\backslash\{x\in\mathbb{R}: g(x)=0\}=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}\cap\left(\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)\backslash\{2\}=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\frac{x^2-x-2}{1-4x^2}}{\frac{x-2}{2x+1}}=\frac{(x^2-x-2)(2x+1)}{(1-4x^2)(x-2)}=\frac{(x-2)(x+1)(2x+1)}{(1-2x)(1+2x)(x-2)}=\frac{x+1}{1-2x}$$

5.2.

$(f+g)(x)\leqslant\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{1-4x^2}+\frac{x-2}{2x+1}\leqslant\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2+x-2-2x^2+4x}{1-4x^2}\leqslant\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-4-x^2+4x}{1-4x^2}-\frac{1}{3}\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-12-3x^2+12x-1+4x^2}{3-12x^2}\leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-13+12x+x^2}{1-4x^2}\leqslant 0$

$-13+12x+x^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-12\pm\sqrt{144+4\times 13}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-12\pm 14}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-13$

Assim:

x	$-\infty$	-13		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$-13+12x+x^2$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1-4x^2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{-13+12x+x^2}{1-4x^2}$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	n.d.	$+$	0	$-$

Logo:

$\frac{-13+12x+x^2}{1-4x^2}\leqslant 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-13\right]\cup\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\cup\left[1,+\infty\right[$