Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Limites infinitos e indeterminações

1. Calcule:

1.1. $\lim\left(2+\frac{3}{n}\right)$

1.2. $\lim\left(\frac{n}{n+1}+3-n^{-1}\right)$

1.3. $\lim\left(3+\frac{n-1}{3n}\right)^3$

1.4. $\lim\left(n^2+\frac{1}{n}\right)$

1.5. $\lim\left(3+\frac{5n-1}{n+2}-n\right)$

2. Considere as sucessões (u_n), (v_n) e (w_n), em que:

$$\lim u_n = -3 \qquad \lim v_n = +\infty \qquad \lim w_n = -\infty$$

Indique, se possível:

2.1. $\lim(u_n v_n)$

2.2. $\lim(u_n w_n)$

2.3. $\lim(u_n + v_n)$

2.4. $\lim(w_n - v_n)$

2.5. $\lim(2u_n - 3v_n)$

3. Seja (u_n) uma progressão aritmética de razão e termos não nulos. Justifique que:

$$\lim \frac{1}{u_n} = 0$$

4. Justifique que

$$\lim \frac{n^3}{n+6} = +\infty$$

começando por calcular

$$\lim \frac{n+6}{n^3}$$

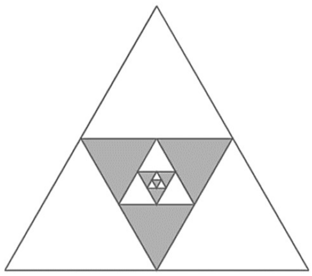
5. Calcule:

5.1. $\lim\left[3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

5.2. $\lim\ v_n$, em que (v_n) é definida por $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{5}{2}v_n, \forall n \in \mathbb{N}\end{cases}$

5.3. $\lim(2^n + 3^{-n})$

6. A figura apresenta os primeiros termos de uma sucessão de triângulos equiláteros, alternadamente brancos e cinzentos, em que os vértices de cada triângulo são os pontos médios dos lados do triângulo anterior.
O 1º termo desta sucessão tem área $\sqrt{3}$.



6.1. Seja (a_n) a sucessão das áreas dos triângulos, mostre que

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{4^{n-1}}$$

6.2. Determine $\lim\ a_n$.

Soluções

1.

1.1.

$$\lim\left(2+\frac{3}{n}\right)=\lim 2+\lim\frac{3}{n}=2+0=2$$

1.2.

$$\lim\left(\frac{n}{n+1}+3-n^{-1}\right)=\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)+\lim 3+\lim(-n^{-1})=1+3-0=4$$

1.3.

$$\lim\left(3+\frac{n-1}{3n}\right)^3=\left(\lim\left(\frac{10n-1}{3n}\right)\right)^3=\left(\frac{10}{3}\right)^3=\frac{1000}{27}$$

1.4.

$$\lim\left(n^2+\frac{1}{n}\right)=\lim n^2+\lim\frac{1}{n}=\lim n^2+\lim n^{-1}=+\infty+0=+\infty$$

1.5.

$$\lim\left(3+\frac{5n-1}{n+2}-n\right)=\lim\left(3-n+\frac{5n-1}{n+2}\right)=$$

$$=\lim(3-n)+\lim\left(\frac{5n-1}{n+2}\right)=-\infty+5=-\infty$$

2.

2.1. $\lim(u_nv_n)=\lim u_n\times\lim v_n=-3\times(+\infty)=-\infty$

2.2. $\lim(u_nw_n)=\lim u_n\times\lim w_n=-3\times(-\infty)=+\infty$

2.3. $\lim(u_n+v_n)=\lim u_n+\lim v_n=-3+(+\infty)=+\infty$

2.4. $\lim(w_n-v_n)=\lim w_n-\lim v_n=\lim w_n+\lim(-v_n)=-\infty+(-\infty)=-\infty$

2.5.

$$\lim(2u_n-3v_n)=\lim(2u_n)+\lim(-3v_n)=2\times(-3)+(-3)\times+\infty=$$

$$=-6+(-\infty)=-\infty$$

3.

Tem-se que $\lim u_n=-\infty$ ou $\lim u_n=+\infty$.

Pelo teorema da inversa de uma sucessão de limite infinito, $\lim\frac{1}{u_n}=0$.

4.

$$\lim\frac{n+6}{n^3}=\lim\left(\frac{1}{n^2}\times\left(\frac{n+6}{n}\right)\right)=\lim\frac{1}{n^2}\times\lim\frac{n+6}{n}=$$

$=\lim n^{-2}\times\lim\frac{n+6}{n}=0\times 1=0^+$ (pois tem todos os termos positivos)

Como $\lim\frac{n+6}{n^3}=0^+$, então, $\lim\frac{n^3}{n+6}=\lim\frac{1}{\frac{n+6}{n^3}}=+\infty$,

pois $\frac{1}{0^+}=+\infty$.

5.

5.1.

$$\lim\left[3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=\lim 3\times\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n=3\times 0=0 \qquad \left(\text{Como } \frac{2}{3}<1,\ \left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0\right)$$

5.2.

v_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{5}{2}$ e, sendo assim, o termo geral pode ser dado por $v_n = 2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$.

Então, $\lim v_n = \lim\left[2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}\right] = \lim 2 \times \lim\left(\frac{5}{2}\right)^{n} \times \lim\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = +\infty \times \frac{4}{5} = +\infty$

$\left(\text{Como } \frac{5}{2} > 1,\ \left(\frac{5}{2}\right)^n \to +\infty\right)$

5.3.

$\lim(2^n + 3^{-n}) = \lim 2^n + \lim \frac{1}{3^n} = \lim 2^n + \lim\left(\frac{1}{3}\right)^n = +\infty + 0 = +\infty$

$\left(\text{Como } \frac{1}{3} < 1 \text{ e } 2 > 1,\ \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0 \text{ e } 2^n \to +\infty\right)$

6.

6.1.

A sucessão (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, pois a razão de semelhança entre os lados de dois triângulos consecutivos é $\frac{1}{2}$; logo, a razão de semelhança entre as áreas dos mesmos triângulos é $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.
Então, o termo geral de (a_n) pode ser dado por:

$$a_n = \sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{4^{n-1}}$$

6.2.

$\lim \frac{\sqrt{3}}{4^{n-1}} = \lim\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \lim\sqrt{3} \times \lim\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \times \lim\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} =$

$= 4\sqrt{3} \times 0 = 0$

$\left(\text{Como } \frac{1}{4} < 1,\ \left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0\right)$