Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Gráficos de funções trigonométricas

1. A função definida por

$$x(t) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)$$

descreve, em função de $t \in [0, 4]$, o movimento oscilatório de um ponto P em torno da origem de uma reta numérica. Esboce o gráfico da função que descreve o movimento de P.

2. Esboce o gráfico das seguintes funções nos intervalos indicados, começando por determinar, para cada uma delas, a amplitude, o período mínimo positivo e os zeros:

2.1. $f(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), em\ [0, 2\pi[$

2.2. $f(x) = -2\cos(4x), em\ [-\pi, \pi[$

3. Esboce o gráfico das seguintes funções nos intervalos indicados:

3.1. $f(x) = 2 + \cos\left(\frac{1}{2}x\right), em\ [0, 4\pi[$

3.2. $f(x) = 1 - 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), em\ [-\pi, \pi[$

3.3. $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 3$, em $[0, \pi[$

3.4. $f(x) = 1 - 2\sin x \cos x, em\ [\pi, 3\pi[$

4. Esboce o gráfico das seguintes funções nos intervalos indicados, começando por determinar, para cada uma delas, o período mínimo positivo e os zeros:

4.1. $f(x) = 2 - \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right), em\ [-\pi, \pi[\setminus\left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

4.2. $f(x) = \tan(3x) + 1, em\ [0, \pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

Soluções

1.

$x(t) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)$ é uma função periódica de período $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

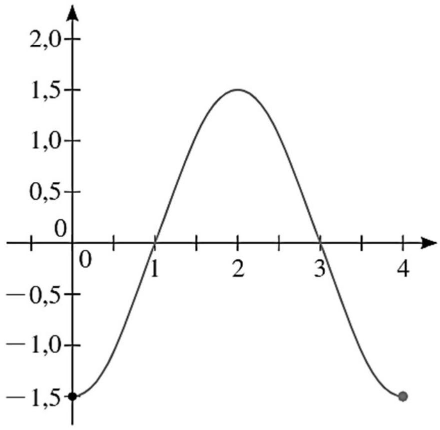
e contradomínio $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$

$\frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t + \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{t}{2} = -\frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = -1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$

Então, os zeros de x em $[0, 4[$ são 1 e 3, pelo que x assume um extremo em 2, que é um máximo, pois $x(2) = \frac{3}{2}\cos(2\pi) = \frac{3}{2}$.

Esta informação permite obter o esboço do gráfico de f no intervalo $[0, 4]$.



2.

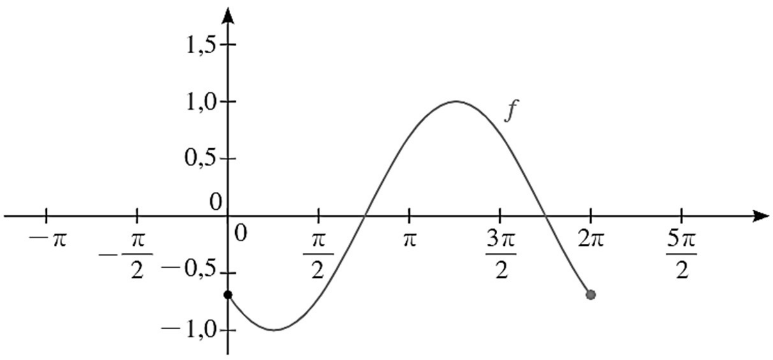
2.1.

amplitude: $|-1| = 1$ período $= \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

em $[0, 2\pi[$: $x = \frac{3\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4}$



2.2.

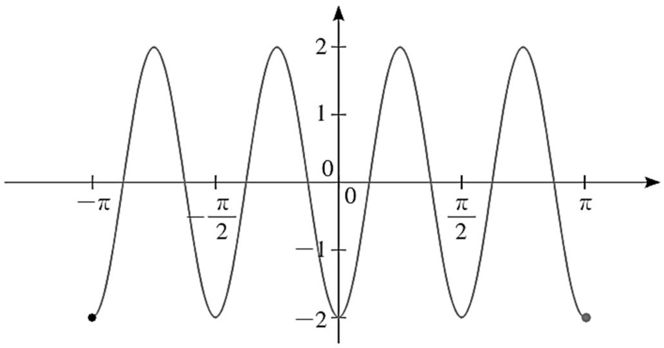
Amplitude $= |-2| = 2$ Período $= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2\cos(4x) = 0 \Leftrightarrow \cos(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

em $[-\pi, \pi[$: $x = -\frac{7\pi}{8} \vee x = -\frac{5\pi}{8} \vee x = -\frac{3\pi}{8} \vee x = -\frac{\pi}{8} \vee$

$\vee\ x = \frac{\pi}{8} \vee x = \frac{3\pi}{8} \vee x = \frac{5\pi}{8} \vee x = \frac{7\pi}{8}$



3.

3.1.

$f(x) = 2 + \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$, em $[0, 4\pi[$

Esta função tem período $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ e o seu gráfico oscila em torno da reta $y = 2$, com amplitude 1.

As soluções da equação $f(x) = 2$, no intervalo $[0, 4\pi[$, são π e 3π.

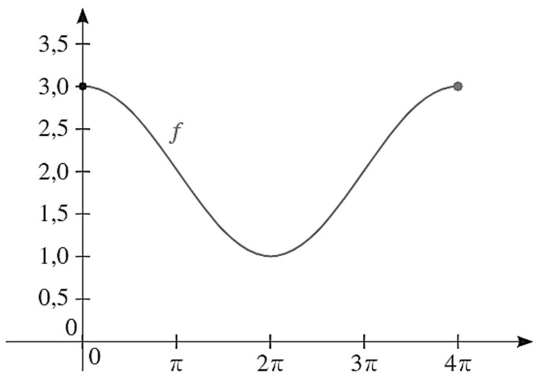
$2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Como $\frac{\pi + 3\pi}{2} = 2\pi$ e $f(2\pi) = 2 + \cos(\pi) = 2 - 1 = 1$, f, assume o valor mínimo 1 em $x = 2\pi$.

f assume o valor máximo 3 em $x = 2\pi - 2\pi = 0$.

Determinando $f(0) = 2 + \cos 0 = 3$, obtém-se o esboço do gráfico de f no intervalo $[0, 4\pi[$.



3.2.

$f(x) = 1 - 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, em $[-\pi, \pi[$.

Esta função tem período $\frac{2\pi}{2} = \pi$ e o seu gráfico oscila em torno da reta $y = 1$ com amplitude $|-2| = 2$.

$$1-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

Assim, as soluções da equação $f(x)=1$ no intervalo $[-\pi, \pi[$ são

$-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{2\pi}{3}$

$$\frac{-\frac{5\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2}=-\frac{7\pi}{12} \text{ e } f\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=-1$$

$$\frac{-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2}=-\frac{\pi}{12} \text{ e } f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=3$$

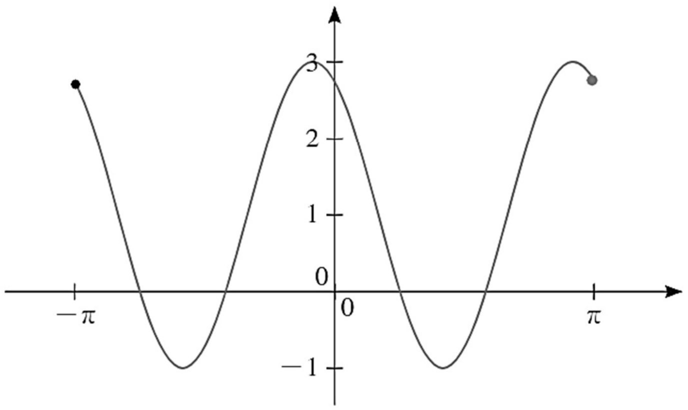
$$\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{5\pi}{12} \text{ e } f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-1$$

f assume o valor mínimo -1 em $x=-\frac{7\pi}{12}$ e $x=\frac{5\pi}{12}$.

f assume o valor máximo 3 em $x=-\frac{\pi}{12}$ e $x=-\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{11\pi}{12}$.

$$f(0)=1-2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}$$

Obtemos, assim, o esboço do gráfico de f no intervalo $[-\pi, \pi[$:



3.3.

$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+3$ em $[0, \pi[$.

$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+3 \Leftrightarrow f(x)=\cos(2x)+3$

Esta função tem período $\frac{2\pi}{2}=\pi$ e o seu gráfico oscila em torno da reta $y=3$ com amplitude 1 .

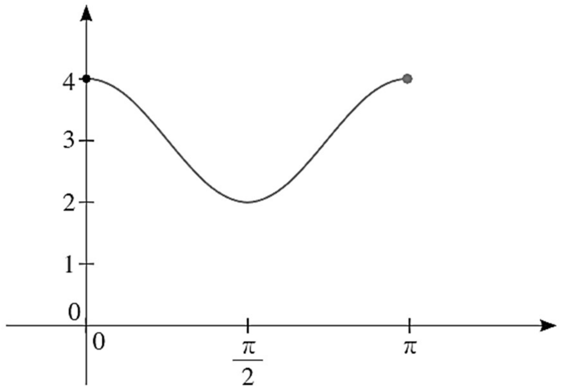
$$f(x)=3 \Leftrightarrow \cos(2x)=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

Assim, as soluções da equação $f(x)=3$ no intervalo $[0, \pi[$ são $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}$.

$$\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}}{2}=\frac{\pi}{2} \text{ e } f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi)+3=2$$. Assim, f assume o valor mínimo 2 em $x=\frac{\pi}{2}$.

$f(0) = \cos 0 + 3 = 1 + 3 = 4$

Obtemos, assim, o esboço do gráfico de f no intervalo $[0, \pi[$:



3.4.

$f(x) = 1 - 2\sin x \cos x$ em $[\pi, 3\pi[$.

$f(x) = 1 - 2\sin x \cos x \Leftrightarrow f(x) = 1 - \sin(2x)$

Esta função tem período $\frac{2\pi}{2} = \pi$ e o seu gráfico oscila em torno da reta $y = 1$ com amplitude $|1| = 1$.

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Assim, as soluções da equação $f(x) = 1$ no intervalo $[\pi, 3\pi[$ são π , $\frac{3\pi}{2}$, 2π , $\frac{5\pi}{2}$.

$$\frac{\pi + \frac{3\pi}{2}}{2} = \frac{5\pi}{4} \text{ e } f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0$$

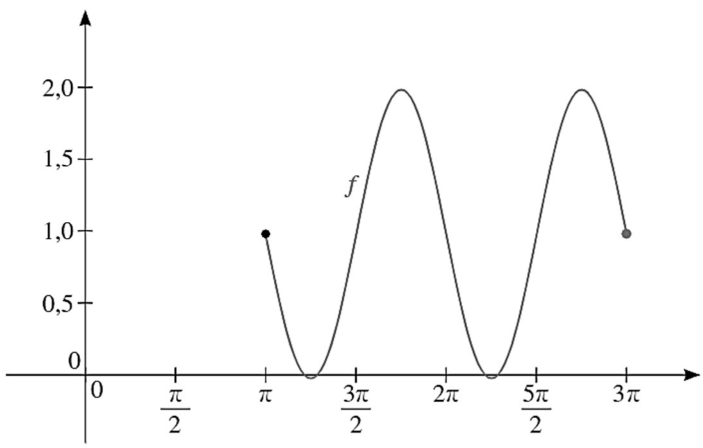
$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{2} = \frac{7\pi}{4} \text{ e } f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2$$

$$\frac{2\pi + \frac{5\pi}{2}}{2} = \frac{9\pi}{4} \text{ e } f\left(\frac{9\pi}{4}\right) = 0$$

f assume o valor mínimo 0 em $x = \frac{5\pi}{4}$ e $x = \frac{9\pi}{4}$.

f assume o valor máximo 2 em $x = \frac{7\pi}{4}$ e $x = \frac{7\pi}{4} + \pi = \frac{11\pi}{4}$

$f(0) = 1$. Obtemos, assim, o esboço do gráfico de f no intervalo $[\pi, 3\pi[$:



4.

4.1.

$$f(x+p)=f(x)\Leftrightarrow 2-\tan\left(x+p+\frac{\pi}{4}\right)=2-\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$$

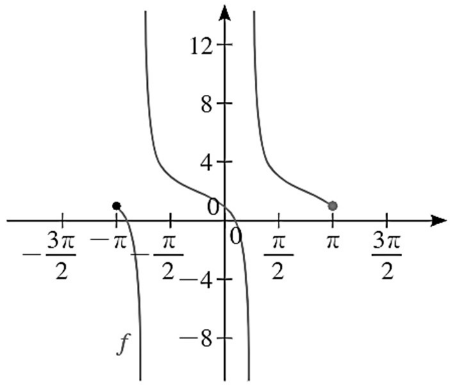
$$\Leftrightarrow \tan\left(x+p+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow p=\pi$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow 2-\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\tan(1{,}107)\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}\approx 1{,}107+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\approx 1{,}107-\frac{\pi}{4}+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}$$

em $]-\pi,\pi[$, $x\approx 0{,}32 \vee x\approx -2{,}82$



4.2.

$$f(x+p)=f(x)\Leftrightarrow \tan\big(3(x+p)\big)+1=\tan(3x)+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan(3x+3p)=\tan(3x)\Leftrightarrow 3p=\pi\Leftrightarrow p=\frac{\pi}{3}$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow \tan(3x)+1=0\Leftrightarrow \tan(3x)=-1\Leftrightarrow \tan(3x)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3},\, k\in\mathbb{Z}$$

em $[0,\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right\}$, $x=\frac{\pi}{4}\vee x=\frac{7\pi}{12}\vee x=\frac{11\pi}{12}$