TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A - 11º ANO

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

GRUPO I

1. O perímetro do triângulo $[OPQ]$ é igual a $\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{QP} =$
$= 1 + 1 + 2\cos 53° \approx 3{,}2$

Resposta **A**

2. O facto de o ponteiro dos minutos do relógio da Inês ter rodado -3π radianos significa que rodou uma volta e meia, o que corresponde à passagem de 1 h 30 min.
Como 10 h 45 min + 1 h 30 min = 12 h 15 min, o relógio da Inês marcava 12 h e 15 min.

Resposta **C**

3. $\overrightarrow{CA} \,.\, \overrightarrow{CB} = \left\| \overrightarrow{CA} \right\| \times \left\| \overrightarrow{CB} \right\| \times \cos\left(\overrightarrow{CA} \,\hat{}\, \overrightarrow{CB} \right) =$
$= 5 \times 5 \times \cos 180° = 5 \times 5 \times (-1) = -25$

Resposta **A**

4. Como o gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, com vértice no ponto $(3, 2)$, a recta tangente ao gráfico em qualquer ponto de abcissa inferior a 3 tem declive positivo, no ponto de abcissa 3 tem declive 0 e em qualquer ponto de abcissa superior a 3 tem declive negativo. Portanto, $f'(1) > 0$, $f'(2) > 0$, $f'(3) = 0$ e $f'(4) < 0$.

Resposta **D**

5. $(f \circ g)\,(2) = f[\,g(2)] = f(-3) = -2$

Resposta **A**

GRUPO II

1.1. $f(x) \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - \dfrac{4}{x+2} \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - \dfrac{4}{x+2} - 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \dfrac{4}{x+2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x+2-4}{x+2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x-2}{x+2} \geq 0$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$Quociente$	$+$	$n.d.$	$-$	0	$+$

Portanto, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \geq 3$ é $]-\infty, -2[\,\cup\, [2, +\infty[$

1.2. Tem-se:
Área do quadrilátero $[ABCD] =$
$=$ Área do trapézio $[BODC]$ $-$ Área do triângulo $[BOA]$

Tendo em vista o cálculo destas áreas, comecemos por determinar as coordenadas dos pontos A, B, C e D.

Como $f(0) = 2$, o ponto A tem coordenadas $(0, 2)$

Tem-se: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - \dfrac{4}{x+2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

Portanto, o ponto B tem coordenadas $(-1, 0)$

C é o ponto de intersecção das assimptotas do gráfico de f, cujas equações são $x = -2$ e $y = 4$. Logo, o ponto C tem coordenadas $(-2, 4)$

Como o ponto D pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à de C, as suas coordenadas são $(0, 4)$

Tem-se, então: Área do quadrilátero $[ABCD] =$
$=$ Área do trapézio $[BODC]$ $-$ Área do triângulo $[BOA] =$

$$= \frac{\overline{BO} + \overline{DC}}{2} \times \overline{OD} - \frac{\overline{BO} \times \overline{OA}}{2} =$$

$$= \frac{1+2}{2} \times 4 - \frac{1 \times 2}{2} = 6 - 1 = 5$$

2.1. Volume do prisma $=$ Área da base $\times$ Altura

A área da base é a^2

A altura é a cota do ponto P

Como o ponto P pertence ao plano ABC e tem ordenada igual à abcissa, vem:

$a + 2a + 3z = 9 \Leftrightarrow 3\,z = 9 - 3a \Leftrightarrow z = 3 - a$

Portanto, o volume do prisma é igual a $a^2(3-a) = 3a^2 - a^3$

2.2. Tem-se: $V\,'(a) = 6a - 3\,a^2 \quad (a \in \,]\,0,3[\,)$

$V\,'(a) = 0 \Leftrightarrow 6a - 3\,a^2 = 0 \Leftrightarrow a(6-3a) = 0$

Como $a \in \,]\,0,3[$, tem que ser $6 - 3a = 0$, ou seja, $a = 2$

a	0	2	3
$V\,'$	$+$	0	$-$
V	$\nearrow$	*Máx.*	$\searrow$

Concluímos assim que o volume do prisma é máximo quando $a = 2$

2.3. O ponto A pertence ao eixo Ox, pelo que a sua ordenada e a sua cota são iguais a zero.

Como o ponto A pertence ao plano ABC, vem:

$x + 2 \times 0 + 3 \times 0 = 9 \Leftrightarrow x = 9$

Portanto, o ponto A tem coordenadas $(9, 0, 0)$

Como o plano ABC tem equação $x + 2y + 3z = 9$, o vector de coordenadas $(1, 2, 3)$ é perpendicular ao plano, pelo que é um vector director da recta pedida.

Assim, uma equação vectorial da recta pedida é

$(x, y, z) = (9, 0, 0) + k\,(1, 2, 3), \quad k \in \mathbb{R}$

3.1. O Manuel atrasou-se uma hora e um quarto, ou seja, 75 minutos.
Como $c(75) \approx 99$, conclui-se que o Manuel saiu 99 minutos depois do meio dia, ou seja, às 13 h e 39 min.

3.2. O Manuel saiu 25 minutos depois do meio dia.
Ora,

$$c(t) = 25 \Leftrightarrow \frac{t^2 + 25\,t}{t + 1} = 25$$

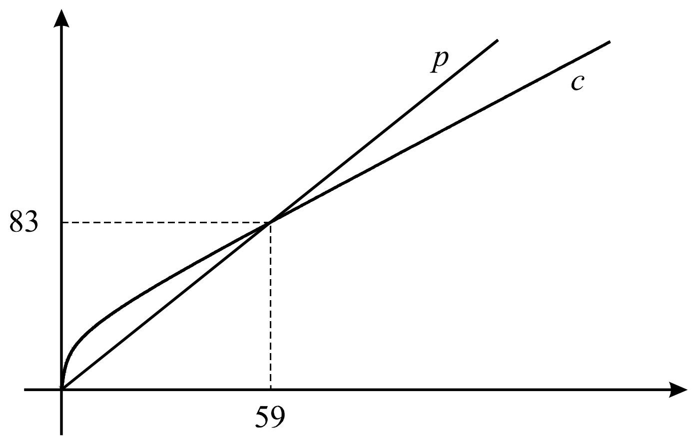
Como $t \geq 0$, $t + 1$ nunca é igual a zero, pelo que

$$\frac{t^2 + 25\,t}{t + 1} = 25 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + 25\,t = 25\,t + 25 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad t = 5$$

O Manuel chegou com cinco minutos de atraso.

3.3. De acordo com a proposta do Manuel, o tempo de permanência de um trabalhador na empresa, após o meio-dia, deverá ser igual ao tempo de atraso, acrescido de 40% desse tempo. Portanto, de acordo com esta proposta, o número de minutos depois do meio-dia que um trabalhador terá de permanecer na empresa, quando se atrasa t minutos, é dado por $t + 0{,}4\,t$, ou seja, $1{,}4\ t$.

Consideremos os gráficos das duas funções: a função c, correspondente ao contrato em vigor, e a função p, correspondente à proposta do Manuel.
Assinalemos o ponto de intersecção destes gráficos (as suas coordenadas podem ser obtidas utilizando a ferramenta de intersecção da calculadora).



Da análise dos gráficos, concluímos que a proposta do Manuel é favorável ao trabalhador para atrasos inferiores a 59 minutos. Para atrasos superiores a 59 minutos, o contrato em vigor penaliza menos o trabalhador.

Quando o atraso é de 59 minutos, a proposta do Manuel e o contrato em vigor determinam o mesmo tempo de permanência na empresa, após o meio-dia, tempo esse igual a 83 minutos.