Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 09.02.2012

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(B)**

A circunferência definida por $x^2 + y^2 = 5$ tem centro no ponto $O(0,0)$

Designemos por P o ponto de coordenadas $(1,2)$

A reta tangente à circunferência no ponto P é perpendicular à reta OP

Como o vetor $\overrightarrow{OP}$ tem coordenadas $(1,2)$, o declive da reta OP é 2

Portanto, o declive da reta tangente à circunferência no ponto P é $-\frac{1}{2}$

2. Resposta **(D)**

O vetor $\vec{s}(1,1,-1)$ é um vetor diretor da reta s e o vetor $\vec{n}(3,3,a)$ é um vetor normal ao plano β

Como a reta s é paralela ao plano β, o vetor $\vec{s}$ é perpendicular ao vetor $\vec{n}$ e, portanto, $\vec{s}\,.\,\vec{n} = 0$

$\vec{s}\,.\,\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (1,1,-1)\,.\,(3,3,a) = 0 \Leftrightarrow 6 - a = 0 \Leftrightarrow a = 6$

3. Resposta **(A)**

Para que a função g não tenha zeros, a assíntota horizontal do seu gráfico tem de ser a reta de equação $y = 0$

Portanto, $k = -1$

4. Resposta **(B)**

Sabe-se que $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{3}$. Portanto:

$\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{3}$, o que exclui a opção A.

$\operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen}\theta = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, pelo que a opção B é a opção correta.

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ e $\cos\theta \neq \frac{1}{3}$ porque $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \neq 1$, o que exclui a opção C.

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$ e $\cos\theta \neq \frac{1}{3}$, o que exclui a opção D.

5. Resposta **(A)**

Tem-se $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{2}$ e, portanto, $h = 2\operatorname{sen}\alpha$

Por outro lado,

$\operatorname{sen} 30^{\circ} = \frac{h}{\overline{BC}}$ e, portanto, $h = \operatorname{sen} 30^{\circ} \times \overline{BC}$, ou seja, $h = \frac{1}{2}\overline{BC}$

Logo, $2\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}\overline{BC}$

Portanto, $\overline{BC} = 4\operatorname{sen}\alpha$

GRUPO II

1.1.1. $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

1.1.2. $]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$

1.2. Do gráfico da função f decorre que $f(x) = -2 + \frac{a}{x-1}$, para um certo número real a

Como $f(-1) = 0$, tem-se $0 = -2 + \frac{a}{-1-1}$, pelo que $0 = -2 - \frac{a}{2}$, ou seja, $a = -4$

Portanto, a função f pode ser definida analiticamente por $f(x) = -2 - \frac{4}{x-1}$

2.1. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-1}{1}$

2.2. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Atendendo a que a pirâmide é regular, tem-se que $[EF]$ é a altura da pirâmide. Portanto, o vetor $\overrightarrow{FE}$ é um vetor normal ao plano ABC

O vetor $\overrightarrow{FE}$ tem coordenadas $(-1,2,2)$ e, portanto, o plano ABC pode ser definido por uma equação do tipo $-x+2y+2z+d=0$

Como o ponto F tem coordenadas $(-2,1,-1)$ e pertence ao plano ABC, tem-se:

$-(-2)+2\times 1+2\times(-1)+d=0$, ou seja, $d=-2$

Assim, o plano ABC pode ser definido pela equação $-x+2y+2z-2=0$, que é equivalente à equação $x-2y-2z+2=0$

2.º Processo

O plano ABC é o único plano que satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

- é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{FE}$
- passa no ponto F

Vamos provar que o plano definido pela equação $x-2y-2z+2=0$ satisfaz estas duas condições e que é, portanto, o plano ABC

O vetor $(1,-2,-2)$ é um vetor normal ao plano de equação $x-2y-2z+2=0$

Como o vetor $\overrightarrow{FE}$ é colinear com este vetor, conclui-se que o vetor $\overrightarrow{FE}$ é perpendicular ao plano.

O ponto F pertence ao plano definido pela equação $x-2y-2z+2=0$, pois

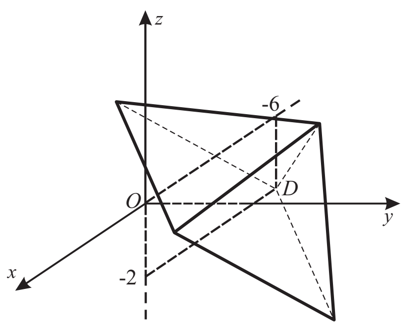
$-2-2\times 1-2\times(-1)+2=-2-2+2+2=0$

2.3. O ponto D é o ponto de intersecção da reta ED com o plano ABC

As coordenadas do ponto D são, portanto, a solução do sistema $\begin{cases} x-2y-2z+2=0 \\ x-y=-6 \\ y-z=2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-2y-2z+2=0 \\ x-y=-6 \\ y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-6-2y-2(y-2)+2=0 \\ x=y-6 \\ z=y-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3y=0 \\ x=y-6 \\ z=y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-6 \\ z=-2 \end{cases}$$



O ponto D é o ponto de coordenadas $(-6,0,-2)$

Este ponto está representado na figura ao lado.

3.1. O ponto P tem coordenadas $(\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)$

Como o ponto B tem coordenadas $(3,0)$, tem-se $d^2 = (\cos\alpha - 3)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2$

$$d^2 = (\cos\alpha - 3)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2 = \cos^2\alpha - 6\cos\alpha + 9 + \operatorname{sen}^2\alpha =$$

$$= \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + 9 - 6\cos\alpha = 1 + 9 - 6\cos\alpha = 10 - 6\cos\alpha$$

3.2.1. $d^2 = 7 \Leftrightarrow 10 - 6\cos\alpha = 7 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \wedge \alpha \in [0, 2\pi[\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \vee \alpha = \frac{5\pi}{3}$$

3.2.2. Como $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{35}$ e $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, tem-se:

$$(-\sqrt{35})^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 36 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{36} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{6} \vee \cos\alpha = -\frac{1}{6}$$

Atendendo a que $\alpha \in [0, \pi]$ e a que $\operatorname{tg}\alpha < 0$, pode concluir-se que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e,

portanto, $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$

Então, $d^2 = 10 - 6\left(-\frac{1}{6}\right) = 11$ e, portanto, $d = \sqrt{11}$

4. As retas QB e RP são perpendiculares se $\overrightarrow{QB} \,.\, \overrightarrow{RP} = 0$

Tem-se: $P(b, 0)$, $B(a, a)$, $R(0, a - b)$ e $Q(b, a - b)$

Então, $\overrightarrow{QB} = B - Q = (a, a) - (b, a - b) = (a - b,\ a - a + b) = (a - b,\ b)$ e
$\overrightarrow{RP} = P - R = (b, 0) - (0, a - b) = (b, -a + b)$

$$\overrightarrow{QB} \,.\, \overrightarrow{RP} = (a - b, b)\,.\,(b, -a + b) = (a - b) \times b + b \times (-a + b) =$$
$$= ab - b^2 - ab + b^2 = 0$$

Portanto, as retas QB e RP são perpendiculares.