Teste Intermédio

Matemática A

Resolução **(Versão 1)**

Duração do Teste: 90 minutos | 11.03.2014

11.º Ano de Escolaridade

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(C)**

O valor máximo da função objetivo de um problema de programação linear é atingido num vértice da região admissível. Os vértices da região admissível são os pontos de coordenadas $(0,0)$, $(0,6)$, $(2,6)$, $(3,4)$ e $(3,0)$

Calculemos o valor da função objetivo em cada um destes pontos.

$L(0,0) = 0 + 3 \times 0 = 0$ $\quad L(0,6) = 0 + 3 \times 6 = 18$ $\quad L(2,6) = 2 + 3 \times 6 = 20$

$L(3,4) = 3 + 3 \times 4 = 15$ $\quad L(3,0) = 3 + 3 \times 0 = 3$

Assim, o valor máximo da função L na região representada é 20

2. Resposta **(C)**

Seja $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$; tem-se $\operatorname{sen} x < 0$, $\cos x < 0$ e $\operatorname{tg} x > 0$

Então, $\operatorname{sen} x + \cos x < 0$, $\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x} < 0$, $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x > 0$ e $\operatorname{sen} x \times \operatorname{tg} x < 0$

Portanto, só a expressão $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$ designa um número real positivo, para qualquer x pertencente ao intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

3. Resposta **(B)**

A equação $\operatorname{sen} x = 0{,}3$ tem duas soluções no intervalo $[0, 2\pi[$: uma no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e outra no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

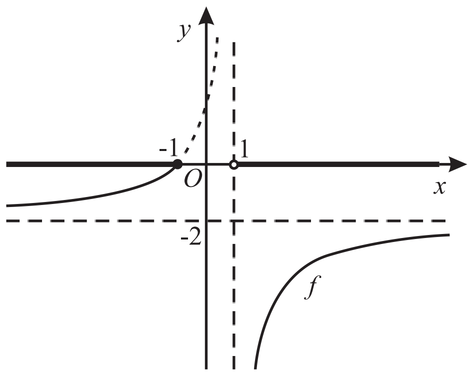
Como a função seno é periódica, de período 2π, a equação $\operatorname{sen} x = 0{,}3$ tem também duas soluções em qualquer um dos vinte intervalos $[-20\pi, -18\pi[$, $[-18\pi, -16\pi[, \cdots,$ $[-2\pi, 0[$, $[0, 2\pi[$, $[2\pi, 4\pi[, \cdots,$ $[18\pi, 20\pi[$

Portanto, a equação dada tem 20×2 soluções no intervalo $[-20\pi, 20\pi[$

4. Resposta **(D)**

O conjunto solução da condição $f(x) \leq 0$ é o conjunto das abcissas dos pontos do gráfico de f que têm ordenada menor ou igual a zero.

Na figura ao lado, estão representados a cheio os pontos da hipérbole com ordenada menor ou igual a zero e a traço mais grosso as respetivas abcissas.



5. Resposta **(C)**

A função f é definida por $f(x) = 3x + 6$ e, portanto, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Como a função g é par e $g(2) = 0$, também se tem $g(-2) = 0$

Portanto, os zeros da função g são -2 e 2

Dado que as duas funções têm domínio $\mathbb{R}$, tem-se:

- $(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = -2 \wedge (x \neq -2 \wedge x \neq 2)}_{\text{condição impossível}}$

Então,

- a função $f \times g$ tem dois zeros: -2 e 2
- a função $\dfrac{f}{g}$ não tem zeros

GRUPO II

1.1. No intervalo $]1, +\infty[$, tem-se:

$$f(x) < \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{2x-3}{1-x} < \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{2x-3}{1-x} - \frac{1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-3)(x-2)-(1-x)}{(1-x)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-6x+5}{(1-x)(x-2)} < 0$$

Em $\mathbb{R}$, o numerador não tem zeros, e os números 1 e 2 são os zeros do denominador.

No intervalo $]1, +\infty[$, tem-se o seguinte quadro de sinais.

x	1		2	$+\infty$
Numerador	n.d.	$+$	$+$	$+$
Denominador	n.d.	$+$	0	$-$
Fração	n.d.	$+$	n.d.	$-$

n.d. – não definida.

Conjunto solução: $]2, +\infty[$

1.2. Tem-se: $(g \circ f)(-3) = g\big(f(-3)\big)$

$$f(-3) = \frac{2}{3} \times (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 - 13 = -4$$

Portanto,

$$(g \circ f)(-3) = 6 \Leftrightarrow g\big(f(-3)\big) = 6 \Leftrightarrow g(-4) = 6 \Leftrightarrow k \times (-4) + 2 = 6 \Leftrightarrow k = -1$$

1.3. Na figura, está representada, num referencial, parte do gráfico da função f

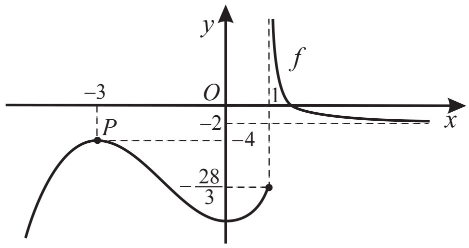
Nesse referencial, estão também representados:

– o ponto de abcissa 1 e a respetiva ordenada

– a assíntota horizontal do gráfico da função f definida pela equação $y = -2$

– a assíntota vertical do gráfico da função f definida pela equação $x = 1$

– o ponto $P(-3, -4)$, cuja ordenada é o máximo relativo da função f



O contradomínio da função é o conjunto das ordenadas dos pontos do seu gráfico.

Portanto, o contradomínio da função f é $]-\infty, -4] \cup]-2, +\infty[$

2.1. A área do polígono $[BCDQP]$ é igual à soma da área do triângulo $[ODQ]$ com a área do pentágono $[ODCBP]$

A área do triângulo $[ODQ]$ é dada por $\dfrac{\overline{OD} \times \overline{QR}}{2}$

Tem-se: $\operatorname{sen} x = \dfrac{\overline{QR}}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{\overline{QR}}{1} \Leftrightarrow \overline{QR} = \operatorname{sen} x$

Portanto, a área do triângulo $[ODQ]$ é dada por $\dfrac{1 \times \operatorname{sen} x}{2}$, ou seja, é dada por $\dfrac{\operatorname{sen} x}{2}$

A área do pentágono $[ODCBP]$ é igual à diferença entre a área do retângulo $[ABCD]$ e a área do triângulo $[OAP]$

A área do retângulo $[ABCD]$ é igual a 2

A área do triângulo $[OAP]$ é dada por $\dfrac{\overline{AO} \times \overline{AP}}{2}$

Tem-se: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \dfrac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{tg} x$

Portanto, a área do triângulo $[OAP]$ é dada por $\dfrac{1 \times \operatorname{tg} x}{2}$, ou seja, $\dfrac{\operatorname{tg} x}{2}$

Assim, a área do pentágono $[ODCBP]$ é dada por $2 - \dfrac{\operatorname{tg} x}{2}$

Logo, a área do polígono $[BCDQP]$ é dada por $2 - \dfrac{\operatorname{tg} x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{2}$

2.2. Tem-se: $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{sen}x$

Então, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\frac{3}{5} \Leftrightarrow -\operatorname{sen}x=-\frac{3}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}x=\frac{3}{5}$

Dado que $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$ e que $\operatorname{sen}x=\frac{3}{5}$, tem-se: $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2 x=1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2 x=1 \Leftrightarrow \frac{9}{25}+\cos^2 x=1 \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{16}{25}$

Como $x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$, tem-se $\cos x=\frac{4}{5}$

Então, dado que $\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$, tem-se $\operatorname{tg}x=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$

Tendo em conta que a área da região sombreada é dada por $2-\frac{\operatorname{tg}x}{2}+\frac{\operatorname{sen}x}{2}$, concluímos que a área pedida é $2-\frac{\frac{3}{4}}{2}+\frac{\frac{3}{5}}{2}=2-\frac{3}{8}+\frac{3}{10}=\frac{80-15+12}{40}=\frac{77}{40}$

3.1. Dois planos paralelos admitem o mesmo vetor normal. Portanto, uma equação cartesiana do plano pedido é da forma $x+y+2z=d$

Como o plano passa no ponto $D(1,2,3)$, tem-se $1+2+2\times 3=d$

Logo, $d=9$

Assim, uma equação do plano que passa no ponto D e é paralelo ao plano ABC é $x+y+2z=9$

3.2. Como os pontos A, B e C pertencem ao plano ABC, as suas coordenadas satisfazem a equação $x+y+2z=12$

Determinemos as coordenadas dos pontos A, B e C

- como o ponto A tem ordenada zero e cota zero, tem-se $x+0+2\times 0=12$, pelo que $x=12$; portanto, o ponto A tem coordenadas $(12,0,0)$
- como o ponto B tem abcissa zero e cota zero, tem-se $0+y+2\times 0=12$, pelo que $y=12$; portanto, o ponto B tem coordenadas $(0,12,0)$
- como o ponto C tem abcissa zero e ordenada zero, tem-se $0+0+2z=12$, pelo que $z=6$; portanto, o ponto C tem coordenadas $(0,0,6)$

O ponto M é o ponto de coordenadas $\left(\frac{12+0}{2},0,\frac{0+6}{2}\right)=(6,0,3)$

Tem-se, então, $\overrightarrow{MB}=B-M=(0,12,0)-(6,0,3)=(-6,12,-3)$

Portanto, uma condição cartesiana da reta MB é $\frac{x}{-6}=\frac{y-12}{12}=\frac{z}{-3}$

3.3. Seja r a reta que passa em O e é perpendicular ao plano ABC

O ponto P é o ponto de intersecção da reta r com esse plano.

Dado que a reta r é perpendicular ao plano ABC, um vetor diretor desta reta é o vetor de coordenadas $(1,\ 1,\ 2)$

A determinação das coordenadas do ponto P pode fazer-se por dois processos.

1.º Processo

Recorrendo a uma condição cartesiana da reta r

Como a reta r passa no ponto O, origem do referencial, e tem a direção do vetor de coordenadas $(1,\ 1,\ 2)$, uma condição que define esta reta é $x = y = \frac{z}{2}$

As coordenadas do ponto P são, portanto, a solução do sistema $\begin{cases} x = \frac{z}{2} \\ y = \frac{z}{2} \\ x + y + 2z = 12 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{z}{2} \\ y = \frac{z}{2} \\ x + y + 2z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{z}{2} \\ y = \frac{z}{2} \\ \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + 2z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{z}{2} \\ y = \frac{z}{2} \\ z + 2z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{z}{2} \\ y = \frac{z}{2} \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Portanto, o ponto P é o ponto de coordenadas $(2,\ 2,\ 4)$

2.º Processo

Recorrendo a uma equação vetorial da reta r

Como a reta r passa no ponto O, origem do referencial, e tem a direção do vetor de coordenadas $(1,\ 1,\ 2)$, uma equação vetorial desta reta é $(x,\ y,\ z) = k(1, 1, 2), \quad k \in \mathbb{R}$

Tem-se: $(x,\ y,\ z) = k(1, 1, 2) \ \Leftrightarrow \ x = k \ \wedge \ y = k \ \wedge \ z = 2k$

Portanto, qualquer ponto da reta r tem coordenadas da forma $(k,\ k,\ 2k)$, sendo k um número real.

O ponto P é o ponto desta reta cujas coordenadas satisfazem a equação $x + y + 2z = 12$

De $k + k + 2 \times 2k = 12$, conclui-se que $k = 2$

Portanto, o ponto P é o ponto de coordenadas $(2, 2, 4)$

Assim, o raio da esfera é $\overline{OP} = \| \overrightarrow{OP} \| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24}$

Portanto, o volume da esfera é $\frac{4}{3} \times \pi \times (\sqrt{24})^3$

4. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Tem-se que a altura de um triângulo equilátero de lado a é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2} a$

Portanto, $\| \overrightarrow{AM} \| = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

Então,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \| \overrightarrow{AB} \| \times \| \overrightarrow{AM} \| \times \cos(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{AM}) = a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times \cos 30^{\circ} = a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2}{4}$$

2.º Processo

Tem-se: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$

Portanto, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AM} = \| \overrightarrow{AM} \|^2 + 0 = \| \overrightarrow{AM} \|^2$

Tem-se que a altura de um triângulo equilátero de lado a é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2} a$

Assim, $\| \overrightarrow{AM} \| = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

Portanto, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \| \overrightarrow{AM} \|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 = \frac{3a^2}{4}$

3.º Processo

Tem-se: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$

Portanto, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} =$

$= \| \overrightarrow{AB} \|^2 + \| \overrightarrow{AB} \| \times \| \overrightarrow{BM} \| \times \cos(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{BM}) =$

$= a^2 + a \times \frac{a}{2} \times \cos 120^{\circ} = a^2 + \frac{a^2}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{3a^2}{4}$