TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. Tem-se:

- o vector de coordenadas $(1, 1, -1)$ é perpendicular ao plano α
- o vector de coordenadas $(2, 2, -2)$ é perpendicular ao plano β

Estes dois vectores são colineares, pelo que os dois planos são paralelos.

Como as duas equações não são equivalentes, os planos não são coincidentes, sendo, portanto, estritamente paralelos. Por isso, a intersecção dos planos α e β é o conjunto vazio.

Resposta **A**

2. Tem-se $\beta + 2\alpha = \pi$, ou seja, $\beta = \pi - 2\alpha$

Vem, então: $\cos\beta = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos(2\alpha)$

Resposta **D**

3. Sendo θ um valor pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, tem-se

$\operatorname{sen}\theta > 0$, $\cos\theta < 0$ e $\operatorname{tg}\theta < 0$

Por isso, $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta < 0$, $\operatorname{sen}\theta \times \cos\theta < 0$, $\operatorname{sen}\theta \times \operatorname{tg}\theta < 0$

e $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{tg}\theta > 0$

Resposta **D**

4. $1 + 3\operatorname{tg}(2x) = 4 \Leftrightarrow 3\operatorname{tg}(2x) = 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = 1$. Tem-se agora:

- $\operatorname{tg}\left[2 \times \left(-\frac{\pi}{8}\right)\right] = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$
- $\operatorname{tg}\left(2 \times \frac{3\pi}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$
- $\operatorname{tg}\left(2 \times \frac{5\pi}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$
- $\operatorname{tg}\left(2 \times \frac{7\pi}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1$

Resposta **C**

5. Como cada litro de bebida *X* dá um lucro de 4 euros e cada litro de bebida *Y* dá um lucro de 5 euros, o lucro é dado por $4x + 5y$, lucro esse que se pretende maximizar. As respostas B e D ficam portanto excluídas.

Por outro lado:

- cada litro de bebida *X* tem meio litro de sumo de laranja e meio litro de sumo de manga; assim, para confeccionar x litros de bebida *X*, gastam-se $\frac{x}{2}$ litros de sumo de laranja e $\frac{x}{2}$ litros de sumo de manga;
- cada litro de bebida *Y* tem $\frac{2}{3}$ de litro de sumo de laranja e $\frac{1}{3}$ de litro de sumo de manga; assim, para confeccionar y litros de bebida *Y*, gastam-se $\frac{2y}{3}$ litros de sumo de laranja e $\frac{y}{3}$ litros de sumo de manga.

Portanto,

- o número total de litros de sumo de laranja consumidos na confecção dos dois tipos de bebidas é $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3}$
- o número total de litros de sumo de manga consumidos na confecção dos dois tipos de bebidas é $\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$

Como a frutaria dispõe diariamente de 12 litros de sumo de laranja e de 10 litros de sumo de manga, tem-se $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} \leq 12$ e $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 10$

Resposta **A**

Grupo II

1.1.1. Como o declive da recta AB é igual a $\frac{1}{2}$, a equação reduzida desta recta é da forma $y = \frac{1}{2}\,x + b$

Como a recta passa no ponto $A(-5, 0)$, tem-se $0 = \frac{1}{2} \times (-5) + b$

$$0 = \frac{1}{2} \times (-5) + b \Leftrightarrow 0 = -\frac{5}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$$

Vem, então:

$$y = \frac{1}{2}\,x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2y = x + 5 \Leftrightarrow x - 2y + 5 = 0$$

1.1.2. O ponto B é o único ponto do primeiro quadrante que pertence simultaneamente à recta AB e à circunferência centrada na origem do referencial e raio 5, cuja equação é $x^2 + y^2 = 25$.
Portanto, para mostrar que o ponto B tem coordenadas $(3, 4)$, basta verificar que este par ordenado satisfaz, quer a equação da recta, quer a equação da circunferência.
Tem-se:

- $3 - 2 \times 4 + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3 - 8 + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 0$, o que é verdade;
- $3^2 + 4^2 = 25 \;\Leftrightarrow\; 9 + 16 = 25 \;\Leftrightarrow\; 25 = 25$, o que também é verdade.

Portanto, o ponto B tem coordenadas $(3, 4)$.

1.1.3. O triângulo $[ABC]$ é rectângulo em B se, e só se, os vectores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ são perpendiculares.
Tem-se:

$\overrightarrow{BA} = A - B = (-5, 0) - (3, 4) = (-8, -4)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (-3, 16) - (3, 4) = (-6, 12)$

Estes dois vectores são perpendiculares se, e só se, o produto escalar $\overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BC}$ é igual a zero.

Vejamos: $\overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BC} = (-8, -4) \,.\, (-6, 12) = 48 - 48 = 0$

O triângulo $[ABC]$ é, de facto, rectângulo em B

1.2.1. Tem-se que as coordenadas do ponto B são $(5\cos\alpha\,,\ 5\,\mathrm{sen}\,\alpha)$
Como as coordenadas do ponto A são $(-5, 0)$, tem-se:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (5\cos\alpha\,,\ 5\,\mathrm{sen}\,\alpha) - (-5, 0) = (5 + 5\cos\alpha\,,\ 5\,\mathrm{sen}\,\alpha)$

Portanto, $d^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = (5 + 5\cos\alpha)^2 + (5\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 =$

$$= 25 + 50\cos\alpha + 25\cos^2\alpha + 25\,\mathrm{sen}^2\,\alpha =$$

$$= 25 + 50\cos\alpha + 25\,(\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\,\alpha) =$$

$$= 25 + 50\cos\alpha + 25 = 50 + 50\cos\alpha$$

1.2.2. Tem-se $1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ Como $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{24}$ vem:

$$1 + 24 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\cos^2\alpha} = 25 \;\Leftrightarrow\; \cos^2\alpha = \frac{1}{25}$$

Como α é um ângulo do primeiro quadrante, tem-se $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$

Portanto, $d^2 = 50 + 50\cos\alpha = 50 + 50 \times \dfrac{1}{5} = 50 + 10 = 60$

Vem, então, $d = \sqrt{60}$

2.1. Tem-se que o vector de coordenadas $(10, 15, 6)$ é perpendicular ao plano α, pelo que tem a direcção da recta em causa.
Como esta recta passa pelo ponto $U(5, 5, 5)$, uma condição que a define pode ser

$$\frac{x-5}{10} = \frac{y-5}{15} = \frac{z-5}{6}$$

A recta também pode ser definida por $(x, y, z) = (5, 5, 5) + k(10, 15, 6), \quad k \in \mathbb{R}$

2.2. O ponto M tem abcissa igual a 5, cota igual a 5 e pertence ao plano de equação $10\,x + 15\,y + 6\,z = 125$, pelo que a sua ordenada é a solução da equação
$10 \times 5 + 15\,y + 6 \times 5 = 125$
Tem-se: $10 \times 5 + 15\,y + 6 \times 5 = 125 \Leftrightarrow 50 + 15\,y + 30 = 125 \Leftrightarrow y = 3$
Portanto, o ponto M tem coordenadas $(5, 3, 5)$

O ponto N tem ordenada igual a 5, cota igual a 5 e pertence ao plano de equação $10\,x + 15\,y + 6\,z = 125$, pelo que a sua abcissa é a solução da equação
$10\,x + 15 \times 5 + 6 \times 5 = 125$
Tem-se: $10\,x + 15 \times 5 + 6 \times 5 = 125 \Leftrightarrow 10\,x + 75 + 30 = 125 \Leftrightarrow x = 2$
Portanto, o ponto N tem coordenadas $(2, 5, 5)$

O ângulo MQN é o ângulo dos vectores $\overrightarrow{QM}$ e $\overrightarrow{QN}$

Como o ponto Q tem coordenadas $(5, 5, 0)$, vem:

$$\overrightarrow{QM} = M - Q = (5, 3, 5) - (5, 5, 0) = (0, -2, 5)$$

$$\overrightarrow{QN} = N - Q = (2, 5, 5) - (5, 5, 0) = (-3, 0, 5)$$

O produto escalar $\overrightarrow{QM} \,.\, \overrightarrow{QN}$ é igual a $0 \times (-3) + (-2) \times 0 + 5 \times 5 = 25$

Vem, então: $\overrightarrow{QM} \,.\, \overrightarrow{QN} = \left\|\overrightarrow{QM}\right\| \times \left\|\overrightarrow{QN}\right\| \times \cos\beta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 25 = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 5^2} \times \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 5^2} \times \cos\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 = \sqrt{29} \times \sqrt{34} \times \cos\beta \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{25}{\sqrt{986}}$$

Portanto, como β é um ângulo interno de um triângulo, tem-se $0° < \beta < 180°$, pelo que $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{25}{\sqrt{986}}\right) \approx 37°$