Máximo Matemática A 11

Proposta de questões de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

---

1. A expressão $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$ é equivalente a:

(A) $-\sin x$ **(B)** $-\cos x$ **(C)** $\sin x$ **(D)** $\cos x$

2. Se $\sin x = \frac{2}{3}$, o valor de $\tan^2 x$ é:

(A) 0,6 **(B)** 0,7 **(C)** 0,8 **(D)** 0,9

3. Seja $\theta = 210°$.

Qual das opções seguintes é verdadeira?

(A) $\tan\theta < \cos\theta < \sin\theta$

(B) $\cos\theta < \sin\theta < \tan\theta$

(C) $\sin\theta < \tan\theta < \cos\theta$

(D) $\sin\theta < \cos\theta < \tan\theta$

4. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 2k + a\cos(ax)$, sendo a e k números naturais.

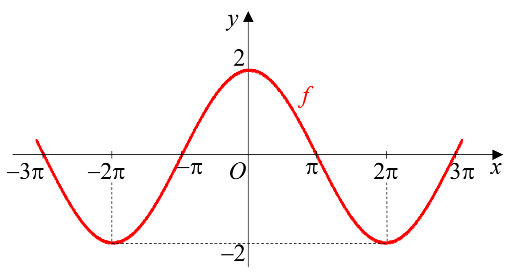
Sendo $D'_f = [-2, 8]$ o contradomínio da função f , o período fundamental de f é:

(A) $\frac{\pi}{3}$ **(B)** $\frac{2\pi}{3}$ **(C)** $\frac{\pi}{5}$ **(D)** $\frac{2\pi}{5}$

5. Sabendo que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e que $\sin\alpha = a$, com $a \in]-1, 1[$, então $\tan(\pi - \alpha)$ é igual a:

(A) $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ **(B)** $-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ **(C)** $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ **(D)** $-\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

6. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico cartesiano da função f , de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = k\cos(tx)$.



Qual das opções seguintes é verdadeira?

(A) $k = -2$ e $t = 2$ **(B)** $k = 2$ e $t = \frac{1}{2}$

(C) $k = -2$ e $t = \frac{1}{2}$ **(D)** $k = 2$ e $t = 2$

7. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\cos(3x)$.

Qual das opções seguintes é verdadeira?

(A) $D'_f=[-3,3]$

(B) f é decrescente em $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

(C) O período fundamental de f é $P_0=\frac{\pi}{3}$.

(D) Para qualquer $x\in\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[$, f é positiva

8. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ definida por:

$$f(x)=\sin(\pi+x)+\tan x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

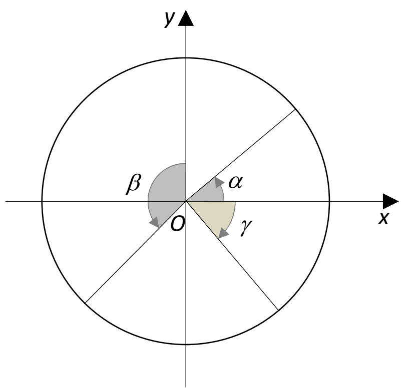
Sabendo que $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}$, com $\pi<\theta<2\pi$, qual é o valor de $f(\theta)$?

(A) $\frac{7\sqrt{5}}{6}$ **(B)** $-\frac{\sqrt{5}}{6}$ **(C)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **(D)** $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

9. Se x é a medida da amplitude de um ângulo, em radianos, e $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}$, então:

(A) $\sin(2x)>0$ **(B)** $\tan x>0$ **(C)** $\cos(2x)<0$ **(D)** $\sin x<0$

10. Considere os ângulos α, β e γ representados na figura ao lado numa circunferência trigonométrica.
Observe que o lado origem dos ângulos α e γ é o semieixo positivo Ox e que o lado origem do ângulo β é o semieixo positivo Oy.



Qual das opções seguintes é **falsa**?

(A) $\cos\alpha>\cos\beta$

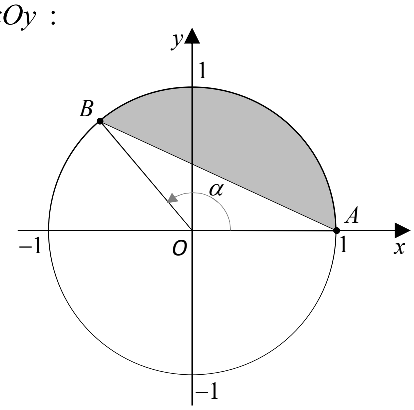
(B) $\sin\alpha>\sin\gamma$

(C) $\sin\gamma>\cos\alpha$

(D) $\cos\beta<\cos\gamma$

11. Na figura ao lado, estão representados num referencial ortonormado xOy :

- a circunferência trigonométrica;
- o ponto A de coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto B, ponto de interseção do lado extremidade do ângulo α com a circunferência.



Seja $A(\alpha)$ a área delimitada pelo arco de circunferência AB e o segmento $[AB]$, com $\alpha \in [0, \pi]$.

Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

(A) A área A é uma função crescente com o ângulo α .

(B) $\frac{1}{2} < A\left(\frac{\pi}{2}\right) < 1$

(C) $A(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha - \sin \alpha)$

(D) $A(\pi) = \pi$

12. Seja $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $0 < f\left(\frac{23\pi}{12}\right) < \frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{2} < f\left(\frac{23\pi}{12}\right) < 0$

(C) $-1 < f\left(\frac{23\pi}{12}\right) < -\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{2} < f\left(\frac{23\pi}{12}\right) < 1$

13. Para que valores reais de k a equação $6 - 3\cos x = k$, com $x \in \mathbb{R}$, admite solução?

(A) $k \in [3, 9]$ **(B)** $k \in [-1, 5]$

(C) $k \in \mathbb{R}$ **(D)** $k \in [-3, 3]$

14. Considere a função, definida em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = 7 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Qual o menor valor real positivo de x para o qual a função f tem um máximo relativo?

(A) $\frac{\pi}{3}$ **(B)** $\frac{\pi}{6}$ **(C)** $\frac{5\pi}{6}$ **(D)** $\frac{2\pi}{3}$

15. Qual é, em $\mathbb{R}$, o conjunto-solução da equação $2 - \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 3$?

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ **(B)** $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

(C) $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ **(D)** $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

FIM

Proposta de resolução

1. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\cos\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin x$

Resposta: (C)

2. $\sin x=\frac{2}{3}$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cos^2 x=1 \Leftrightarrow \cos^2 x=1-\frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{5}{9}$

$\tan^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}}=\frac{4}{5}=0,8$

Resposta: (C)

3. $\theta=210°=180°+30°$.

$\tan 210°=\tan\left(180°+30°\right)=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos 210°=\cos\left(180°+30°\right)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 210°=\sin\left(180°+30°\right)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}<-\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos\theta<\sin\theta<\tan\theta$

Resposta: (B)

4. $f\left(x\right)=2k+a\cos\left(ax\right)$, $D'_f=\left[-2\,,8\right]$

Como $-1\leq\cos\left(ax\right)\leq 1$ para todo o $x\in\mathbb{R}$ vem $D'_f=\left[2k-a\,,2k+a\right]$ e, portanto,

$$\begin{cases}2k-a=-2\\2k+a=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2k=a-2\\a-2+a=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2k=a-2\\2a=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{3}{2}\\a=5\end{cases}$$

$f\left(x\right)=3+5\cos\left(5x\right)$

O período fundamental de f é $\frac{2\pi}{5}$.

Resposta: **(D)**

5. $\sin\alpha = a$, com $a \in]-1,1[$ e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha = a$

$a^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - a^2$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\cos\alpha < 0$ e se $a \in]-1,1[$ então $0 \le 1 - a^2 \le 1$.

Logo, $\cos\alpha = -\sqrt{1-a^2}$.

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{a}{-\sqrt{1-a^2}} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

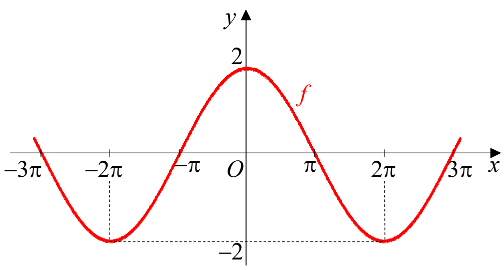
Resposta: (A)

6. $f(x) = k\cos(tx)$

Como $D'_f = [-2, 2]$, vem $k = 2$

O período fundamental de f é 4π .

$\frac{2\pi}{t} = 4\pi \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{4\pi} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$



Resposta: (B)

7. $f(x) = \cos(3x)$.

(A) $D'_f = [-1,1]$

(B) Se $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ então $3x \in [0, \pi]$ e a função cosseno é decrescente neste intervalo. Logo, f é decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

(C) O período fundamental de f é $P_0 = \frac{2\pi}{3}$.

(D) Por exemplo, $-\frac{8\pi}{9} \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ e $f\left(-\frac{8\pi}{9}\right) = \cos\left(-3 \times \frac{8\pi}{9}\right) = \cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) =$

$$= \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} < 0$$

Resposta: (B)

8. $f(x) = \sin(\pi + x) + \tan x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = -\sin x + \tan x + \sin x \Leftrightarrow f(x) = \tan x$

$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \wedge \pi < \theta < 2\pi \Leftrightarrow -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{2}{3} \wedge \pi < \theta < 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos\theta = \frac{2}{3} \wedge \pi < \theta < 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{2}{3} \wedge \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} \Leftrightarrow 1 + \tan^2\theta = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \tan^2\theta = \frac{9}{4} - 1 \Leftrightarrow \tan^2\theta = \frac{5}{4}$

Como $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\tan\theta > 0$. Logo $\tan\theta = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Resposta: (C)

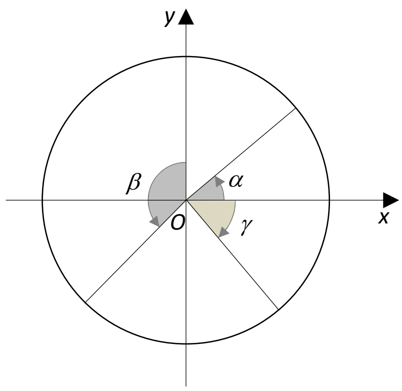
9. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \pi < 2x < \frac{3\pi}{2}$ (x é do 2.º quadrante e $2x$ é do 3.º quadrante)

Logo $\sin(2x) < 0$, $\tan x < 0$, $\cos(2x) < 0$ e $\sin x > 0$.

Resposta: (C)

10.

$\alpha \in 1.^{\text{o}}Q$	$\beta \in 2.^{\text{o}}Q$	$\gamma \in 4.^{\text{o}}Q$
$\cos\alpha > 0$	$\cos\beta < 0$	$\cos\gamma > 0$
$\sin\alpha > 0$		$\sin\gamma < 0$



Temos, então

$\underset{+}{\cos\alpha} > \underset{-}{\cos\beta}$

$\underset{+}{\sin\alpha} > \underset{-}{\sin\gamma}$

$\underset{-}{\sin\gamma} < \underset{+}{\cos\alpha}$

$\underset{-}{\cos\beta} < \underset{+}{\cos\gamma}$

Resposta: (C)

11.

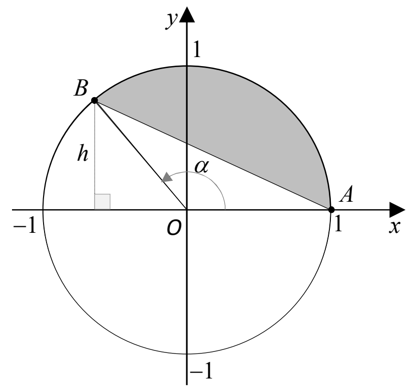
- **(A)** é verdadeira

- $A\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}\text{ A}_{\text{círculo}}-A_{\text{triângulo[OAB]}}=\frac{\pi\times1^2}{4}-\frac{1\times1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi-2}{4}$

  Como $1<\pi-2<2$ então $\frac{1}{4}<\frac{\pi-2}{4}<\frac{1}{2}$

  pelo que $\frac{1}{4}<A\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{1}{2}$.

  Logo, (B) é verdadeira.



- $A=A_{\text{setor } AOB}-A_{\text{triângulo } [AOB]}$

  $A(\alpha)=\frac{\alpha\times1^2}{2}-\frac{\overline{OA}\times h}{2}=\frac{\alpha}{2}-\frac{1\times\sin\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\alpha-\sin\alpha)$

  (C) é verdadeira

- $A(\pi)=\frac{1}{2}(\pi-\sin\pi)\frac{1}{2}(\pi-0)=\frac{\pi}{2}$

  (D) é falsa

Resposta: (D)

12. Seja $f(x)=\sin x,\ x\in\mathbb{R}$.

$$f\left(\frac{23\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{24\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{12}\right)=$$

$$=\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-\sin\frac{\pi}{12}$$

$\sin 0<\sin\frac{\pi}{12}<\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$ (A função seno é crescente no 1.º quadrante)

$$\Leftrightarrow 0<\sin\frac{\pi}{12}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<-\sin\frac{\pi}{12}<0$$

Portanto $-\frac{1}{2}<f\left(\frac{23\pi}{12}\right)<0$

Resposta: (B)

13. $6-3\cos x=k\Leftrightarrow -3\cos x=k-6\Leftrightarrow \cos x=\frac{k-6}{-3}\Leftrightarrow \cos x=\frac{6-k}{3}$

A equação é possível se $-1\le\frac{6-k}{3}\le1$.

$$-1\le\frac{6-k}{3}\le1\Leftrightarrow -3\le6-k\le3\Leftrightarrow 6-k\le3\wedge 6-k\ge-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k\le3-6\wedge -k\ge-3-6\Leftrightarrow k\ge3\vee k\le9\Leftrightarrow k\in[3,9]$$

Resposta: (A)

14. $f(x) = 7 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

f é máxima para $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

O menor valor real positivo de x para o qual a função f tem um máximo relativo obtém-se para $k = 0$, ou seja, é $x = \frac{2\pi}{3}$.

Resposta: (D)

15. $2 - \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 - 3 \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$$

$\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ pois $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$

Resposta: (A)