Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

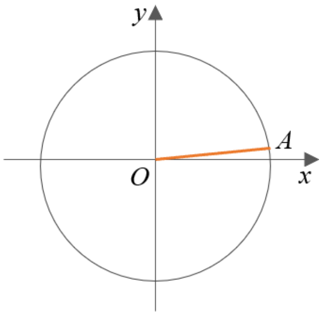
Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

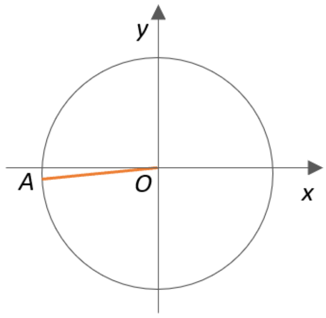
1. Em cada uma das figuras seguintes, está representada, na circunferência trigonométrica, uma semirreta $\dot{O}A$ que é o lado extremidade de um ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox.

Em qual das figuras esse ângulo pode ter 4 radianos de amplitude?

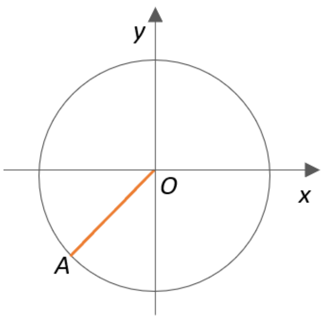
(A)



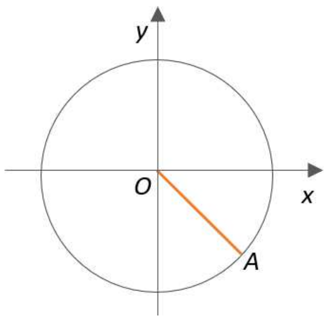
(B)



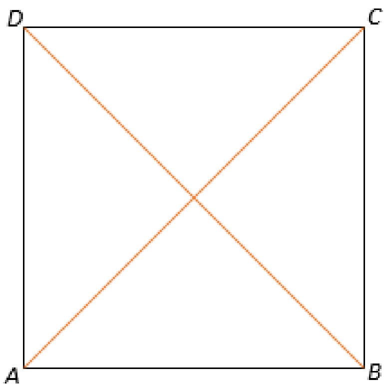
(C)



(D)



2. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado igual a 1.



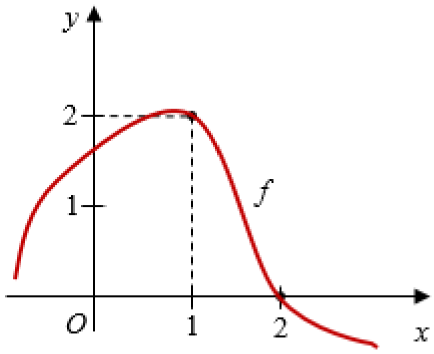
O valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$ é igual a:

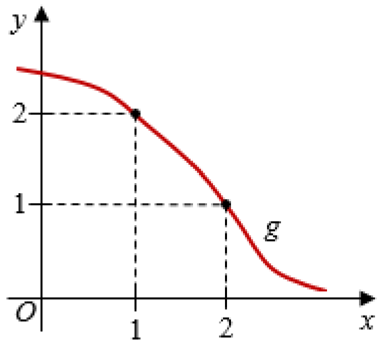
(A) 1 **(B)** -1 **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** $-\sqrt{2}$

3. A soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética é 2304.
A soma do primeiro desses termos com o último é 144.
Qual é o valor de n ?

(A) 8 **(B)** 16 **(C)** 32 **(D)** 64

4. Na figura, está representada parte dos gráficos de duas funções reais de variável real, f e g, onde se assinalam as coordenadas de alguns pontos.





Qual é o valor de $(f \circ g)(1) + g^{-1}(2)$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

5. Relativamente a duas variáveis x e y sabe-se que existe associação linear entre elas.
Sabe-se, ainda, que $y = 0{,}42x + 16{,}8$ é a equação reduzida da reta de mínimos quadrados.

Quais podem ser as coordenadas do ponto $Q(\overline{x}\,,\overline{y})$?

(A) $(2\,;\,17{,}46)$ **(B)** $(4;\,18{,}84)$

(C) $(5\,;\,19{,}8)$ **(D)** $(6\,;\,19{,}32)$

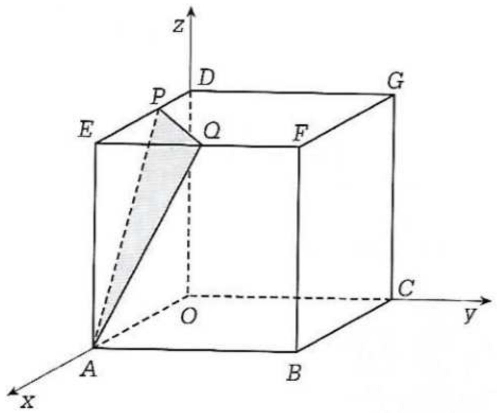
6. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \dfrac{3n - \sqrt{n+5}}{2n}$.

6.1. Determine a ordem do termo da sucessão (u_n) que é igual a $\dfrac{11}{8}$.

6.2. Calcule o valor de $\lim u_n$.

7. Na figura, está representado, num referencial do espaço, o cubo $[OABCDEFG]$ de aresta 6.

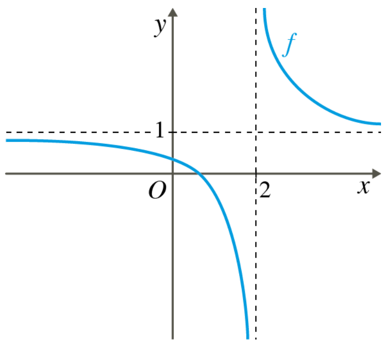
O vértice O do cubo coincide com a origem do referencial.
Os vértices A, C e D do cubo pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respetivamente.
O ponto P pertence à aresta $[DE]$ e o ponto Q pertence à aresta $[EF]$.
O triângulo $[PQA]$ é a secção produzida no cubo pelo plano α definido por $3x-4y+2z=18$.



7.1. Determine a amplitude, em graus, do ângulo QAP, com arredondamento às unidades.

7.2. Escreva uma equação vetorial da reta s que passa em E e é perpendicular ao plano α.

8. Na figura, está representada, num referencial ortonormado xOy, parte da hipérbole que é a representação gráfica de uma função f, definida em $\mathbb{R}\setminus\{c\}$ por $f(x)=a+\dfrac{b}{x-c}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.



Sabe-se que:

- as retas de equações $x=2$ e $y=1$ são as assíntotas do gráfico da função f;
- o gráfico de f interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $\left(0\,,\dfrac{2}{5}\right)$.

8.1. Mostre que $f(x)=1+\dfrac{6}{5x-10}$.

8.2. Mostre que o gráfico de f interseta o eixo Ox no ponto de coordenadas $\left(\dfrac{4}{5}\,,0\right)$.

8.3. Apresente, usando a notação de intervalo de número reais, o conjunto solução da condição $f(x)\geq 0$.

8.4. Para um certo número real k, a função g, definida por $g(x)=f(x-k)$, não interseta o eixo Oy.
Indique o valor de k.

9. Considere a função *g*, de domínio $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$, definida por $g(x)=\dfrac{x-1}{2x+3}$.

9.1. Usando a definição de derivada de uma função num ponto, mostre que $g'(-1)=5$.

9.2. Seja *t* a reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa $x=-1$.

Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta *t* com o eixo das abcissas.

10. Seja *f* a função real de variável real definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-4x^3+4x}{1+x} & \text{se } x<-1\\ x^3-2k & \text{se } x\geq -1\end{cases}$

Determine o valor de *k* de modo que exista $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

11. Considere a função *h* definida, em $\mathbb{R}$, por $h(x)=3+6\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

11.1. Determine o contradomínio da função *h*.

11.2. Determine os zeros de *h* pertencentes ao intervalo $]-\pi,\pi]$.

11.3. Calcule o valor exato de $h\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+h\left(-\dfrac{\pi}{24}\right)$.

12. Relativamente a uma amostra de dados bivariados $(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})$ sabe-se que:

- A soma dos quadrados dos desvios x_i, em relação à média $\overline{x}$, é $SS_x=8$;
- O declive da reta de mínimos quadrados é $a=0,4$;
- O coeficiente de correlação linear da amostra é $r=0,1$.

Qual é o valor de SS_y, ou seja, da soma dos quadrados dos desvios y_i, em relação à média $\overline{y}$?

Fim

Cotações																				
Cotação (em pontos)																				
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**8.3.**	**8.4.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**11.1.**	**11.2.**	**11.3.**	**12.**	
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**200**

Proposta de resolução

1. $4\,\text{rad} = \dfrac{4\times 180^\circ}{\pi} \approx 229{,}18^\circ \approx 180^\text{o} + 49{,}18^\text{o}$

Resposta: (C)

2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = -1\times 1 = -1$ ou

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos 45^\text{o} = -1\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -1$

Resposta: (B)

3. $S_n = \dfrac{u_1 + u_n}{2}\times n$

$u_1 + u_n = 144$

Logo, $\dfrac{144}{2}\times n = 2304 \Leftrightarrow 72n = 2304 \Leftrightarrow n = \dfrac{2304}{72} \Leftrightarrow n = 32$

Resposta: (C)

4. $(f\circ g)(1) + g^{-1}(2) = f\left[g(1)\right] + 1 = f(2) + 1 = 0 + 1 = 1$

Resposta: (A)

5. O ponto $Q(\overline{x}\ ,\ \overline{y})$ pertence à reta dos mínimos quadrados.

$(2\ ;\ 17{,}46)$

$17{,}46 = 0{,}42\times 2 + 16{,}8 \Leftrightarrow 17{,}46 = 17{,}64$ (Falso)

$(4\ ;\ 18{,}84)$

$18{,}84 = 0{,}42\times 4 + 16{,}8 \Leftrightarrow 18{,}84 = 18{,}48$ (Falso)

$(5\ ;\ 19{,}8)$

$19{,}8 = 0{,}42\times 5 + 16{,}8 \Leftrightarrow 19{,}8 = 18{,}9$ (Falso)

$(6\ ;\ 19{,}32)$

$19{,}32 = 0{,}42\times 6 + 16{,}8 \Leftrightarrow 19{,}32 = 19{,}32$ (Verdadeiro)

Resposta: (D)

6.1. Pretendemos determinar n tal que $u_n = \dfrac{11}{8}$.

$$u_n = \frac{11}{8} \Leftrightarrow \frac{3n - \sqrt{n+5}}{2n} = \frac{11}{8} \underset{2n>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 8\left(3n - \sqrt{n+5}\right) = 22n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24n - 8\sqrt{n+5} - 22n = 0$$

$$\Leftrightarrow 2n = 8\sqrt{n+5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 4\sqrt{n+5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 = 16(n+5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 16n - 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4\times 1\times(-80)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{16 \pm \sqrt{576}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{16+24}{2} \vee n = \frac{16-24}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 20 \vee n = -4$$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 20$

Verificação: $u_{20} = \frac{11}{8} \Leftrightarrow \frac{3\times 20 - \sqrt{20+5}}{2\times 20} = \frac{11}{8} \Leftrightarrow \frac{55}{40} = \frac{11}{8}$ (Verdadeiro)

$\frac{11}{8}$ é o 20.º termo da sucessão, ou seja, é o termo de ordem 20.

6.2. $\lim u_n = \lim \frac{3n - \sqrt{n+5}}{2n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{3n - \sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}}{2n} =$

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{=} \lim \frac{3n - n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{2n} = \lim \frac{n\left(3 - \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)}{2n} =$$

$$= \lim \frac{3 - \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{2} = \frac{3-\sqrt{0+0}}{2} = \frac{3}{2}$$

7.1. Como $\overline{OA} = 6$, $A(6, 0, 0)$

O ponto P pertence ao plano α e à reta DE definida por $y = 0 \wedge z = 6$

$P(x, 0, 6)$; $3x - 4\times 0 + 2\times 6 = 18 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Logo, $P(2, 0, 6)$.

O ponto Q pertence ao plano α e à reta EF definida por $x = 6 \wedge z = 6$

$Q(6, y, 6)$; $3\times 6 - 4\times y + 2\times 6 = 18 \Leftrightarrow -4y = -12 \Leftrightarrow y = 3$

Logo, $Q(6, 3, 6)$.

Assim:

$$\cos\left(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}\right) = \frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AQ}\right\|} = \frac{(-4, 0, 6)\cdot(0, 3, 6)}{\sqrt{16+0+36}\times\sqrt{0+9+36}} = \frac{36}{\sqrt{2340}} \qquad \left|\cos^{-1}\left(\frac{36}{\sqrt{2340}}\right) \approx 42^\circ\right.$$

A amplitude do ângulo QAP é aproximadamente igual a 42º.

7.2. $E(6, 0, 6)$

O vetor normal ao plano α é um vetor diretor da reta s.

Logo, $s:(x, y, z)=(6, 0, 6)+k(3, -4, 2), \ k \in \mathbb{R}$

8.1. A função f é do tipo $f(x)=a+\dfrac{b}{x-c}$.

Como a reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, então $a=1$. Por outro lado, a reta de equação $x=2$ é assíntota vertical ao gráfico de f, pelo que $c=2$.

$f(x)=1+\dfrac{b}{x-2}$

Sabemos, ainda, que o ponto de coordenadas $\left(0\ ,\ \dfrac{2}{5}\right)$ pertence ao gráfico de f, ou seja, $f(0)=\dfrac{2}{5}$.

$$\frac{2}{5}=1+\frac{b}{0-2} \Leftrightarrow \frac{b}{-2}=\frac{2}{5}-1 \Leftrightarrow \frac{b}{-2}=-\frac{3}{5} \Leftrightarrow b=\frac{6}{5}$$

Portanto, $f(x)=1+\dfrac{\frac{6}{5}}{x-2} \Leftrightarrow f(x)=1+\dfrac{6}{5x-10}$.

8.2. $f\left(\dfrac{4}{5}\right)=1+\dfrac{6}{5\times\dfrac{4}{5}-10}=1+\dfrac{6}{4-10}=1+\dfrac{6}{-6}=1-1=0$

Como $f\left(\dfrac{4}{5}\right)=0$, então o gráfico de f interseta o eixo Ox no ponto de coordenadas $\left(\dfrac{4}{5}, 0\right)$

8.3. $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1+\dfrac{6}{5x-10}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x-10+6}{5x-10}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x-4}{5x-10}\geq 0$

$5x-4=0 \Leftrightarrow 5x=4 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{5}$

$5x-10=0 \Leftrightarrow 5x=10 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	$\frac{4}{5}$		2	$+\infty$
$5x-4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$5x-10$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	s.s.	$+$

$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ,\ \dfrac{4}{5}\right] \cup \left]2\ ,\ +\infty\right[$

8.4. Para que o gráfico da função g não intersete o eixo Oy terá de ser obtido a partir do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u}(-2\ ,\ 0)$. Portanto, $g(x)=f(x+2)$ e $k=-2$.

9.1. $g'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\dfrac{x-1}{2x+3}-\dfrac{-1-1}{2(-1)+3}}{x+1}=$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\dfrac{x-1}{2x+3}+2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\dfrac{x-1+2(2x+3)}{2x+3}}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\dfrac{x-1+4x+6}{2x+3}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\dfrac{5x+5}{2x+3}}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{5x+5}{(x+1)(2x+3)}=\lim_{x\to -1}\frac{5(x+1)}{(x+1)(2x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{5}{2x+3}=\frac{5}{2(-1)+3}=5$$

Portanto, $g'(-1)=5$.

9.2. $g(-1)=-2$

Ponto de tangência: $(-1,-2)$

Declive da reta t: $m=g'(-1)=5$

A reta *t* pode ser definida pela equação

$$y+2=5(x+1)\Leftrightarrow y=5x+5-2\Leftrightarrow y=5x+3$$

Logo, $y=5x+3$ é a equação reduzida da reta *t*.

Assim, se $y=0$ temos que $5x+3=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}$.

Portanto, $\left(-\dfrac{3}{5}\ ,\ 0\right)$ são as coordenadas do ponto de interseção da reta *t* com o eixo das abcissas.

10. $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ existe se $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)$.

$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)=(-1)^3-2k=-1-2k$

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{-4x^3+4x}{1+x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -1^-}\frac{-4x(x^2-1)}{1+x}=$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{-4x(x-1)(x+1)}{1+x}=\lim_{x\to -1^-}\left[-4x(x-1)\right]=-8$$

Logo, $-1-2k=-8\Leftrightarrow 2k=-1+8\Leftrightarrow k=\dfrac{7}{2}$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ existe se $k=\dfrac{7}{2}$.

11.1. Sabe-se que $x \in \mathbb{R}$, pelo que $2x+\frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$, pois $D_h = \mathbb{R}$.

Assim, tem-se:

$$-1 \leq \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -6 \leq 6\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6+3 \leq 3+6\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \leq 6+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq 3+6\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq h(x) \leq 9$$

Portanto, $D'_h = [-3, 9]$.

11.2. $h(x) = 0 \wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3+6\sin\left(2+\frac{\pi}{3}\right) = 0 \wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2x+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee 2x+\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow 2$$

$$\Leftrightarrow \left(2x = -\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee 2x = \frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in]-\pi, \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in]-\pi, \pi]$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{\pi}{4}+k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge x \in]-\pi, \pi]$$

Cálculos auxiliares

$x = -\frac{\pi}{4}+k\pi$	$x = \frac{5\pi}{12}+k\pi$
Para $k=0$, $x = -\frac{\pi}{4}$	Para $k=-1$, $x = \frac{5\pi}{12}-\pi = -\frac{7\pi}{12}$
Para $k=1$, $x = -\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3\pi}{4}$	Para $k=0$, $x = \frac{5\pi}{12}$

Os resultados obtidos para outros valores de k não pertencem ao intervalo $]-\pi, \pi]$.

Logo, os zeros de h pertencentes ao intervalo $]-\pi, \pi]$ são: $-\frac{7\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{12}$ e $\frac{3\pi}{4}$

11.3. $h\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=3+6\sin\left(2\times\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right)=3+6\sin\left(-\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=$

$=3+6\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=3+6\sin\left(-\frac{4\pi}{3}+2\pi\right)=3+6\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=3+6\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=3+6\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=3+6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3+3\sqrt{3}$

$h\left(-\frac{\pi}{24}\right)=3+6\sin\left(2\left(-\frac{\pi}{24}\right)+\frac{\pi}{3}\right)=3+6\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=$

$=3+6\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=3+6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3+3\sqrt{2}$

Logo, $h\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+h\left(-\frac{\pi}{24}\right)=3+3\sqrt{3}+3+3\sqrt{2}=6+3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

12. $r=a\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$

Substituindo SS_x por 8; a por 0,4 e r por 0,1, vem que:

$0{,}1=0{,}4\sqrt{\frac{8}{SS_y}}\Leftrightarrow\frac{0{,}1}{0{,}4}=\sqrt{\frac{8}{SS_y}}\Leftrightarrow\frac{1}{4}=\sqrt{\frac{8}{SS_y}}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{8}{SS_y}}$

Pelo que $\frac{1}{16}=\frac{8}{SS_y}\Leftrightarrow SS_y=16\times 8\Leftrightarrow SS_y=128$.