Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:** MAIO 2019

Porto Editora

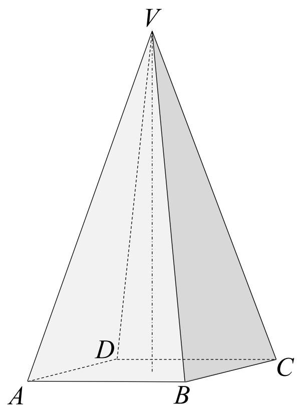
Caderno 1

(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

---

1. Fixado um referencial ortonormado do espaço, considere a pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(0,1,5)$;
- para determinados valores de a, b e c, os pontos V e C têm coordenadas $(a,b,4)$ e $(2,c,-3)$, respetivamente;
- a reta r, que passa no ponto V e é perpendicular ao plano ABC, pode ser definida pela equação vetorial

$$(x,y,z)=(-1,0,0)+k(2,2,1),\ k\in\mathbb{R}$$

1.1. Determine uma equação cartesiana do plano ABC.

1.2. Mostre que $a=7$, $b=8$ e $c=3$.

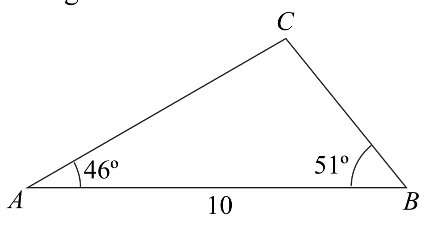
1.3. Determine um valor aproximado à décima do grau da amplitude do ângulo CAV.

1.4. Determine o volume da pirâmide.

2. Considere o triângulo $[ABC]$ representado na figura.

Sabe-se que:

- $\overline{AB}=10$
- $C\hat{B}A=51^{\circ}$
- $B\hat{A}C=46^{\circ}$



Qual é o valor de $\overline{AC}$, arredondado às centésimas?

(A) $7,83$ **(B)** $7,25$ **(C)** $7,43$ **(D)** $6,91$

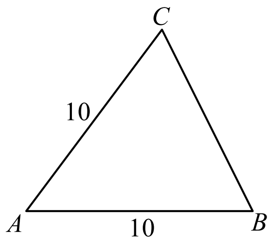
3. Considere, para um certo número real k , a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{kx+x^2} & \text{se } x<0 \\ \sqrt{x+1}-x+1 & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$$

3.1. Determine k sabendo que a função f é contínua em $x=0$.

3.2. Estude a função f quanto à existência de assíntota ao respetivo gráfico em $+\infty$.

4. Na figura, está representado um triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AB}=\overline{AC}=10$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=60$

A área do triângulo $[ABC]$ é igual a:

(A) 30 **(B)** 35

(C) 40 **(D)** 45

Fim do caderno 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item								
Cotação (em pontos)								
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**1.4.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	
13	13	13	14	10	13	14	10	**100**

Caderno 2

(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

5. De uma sucessão (u_n) sabe-se que:

$$u_{500}=2 \wedge u_{n+1}+2=u_n \text{ , para todo } n\in\mathbb{N}$$

A soma dos primeiros 1001 termos de (u_n) é igual a

(A) 0 **(B)** 1000

(C) -1002 **(D)** 4004

6. Num pequeno país com 200 mil habitantes, sabe-se que 5,5 % da população são imigrantes. Tendo-se verificado, nos últimos anos, um acentuado decréscimo da população, o Governo desse país está a desenvolver uma campanha com vista a receber mais imigrantes.

Admita que, em resultado dessa campanha, x milhares de novos emigrantes passam a viver nesse país mantendo-se estável a população que já aí residia.

Seja $P(x)$ a percentagem de população imigrante, após a campanha desenvolvida.

6.1. Mostre que $P(x)=\dfrac{1100+100x}{200+x}$, sendo x o número de novos imigrantes, em milhares.

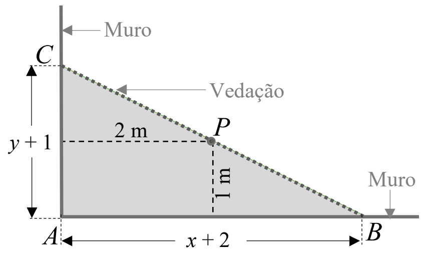
6.2. Resolva a equação $P(x)=10$ e interprete a solução no contexto da situação apresentada.

7. Sabendo que $\alpha=\arccos\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}\right)$, o valor de $\tan\alpha+2\sin(2\alpha)$ é

(A) 0 **(B)** $-2\sqrt{3}$

(C) $2\sqrt{3}$ **(D)** $\sqrt{3}$

8. Pretende-se vedar um canto de um terreno aproveitando dois muros perpendiculares já existentes bem como um poste que dista 1 m e 2 m de cada um dos muros, de acordo com o esquema ao lado. Sabe-se que:



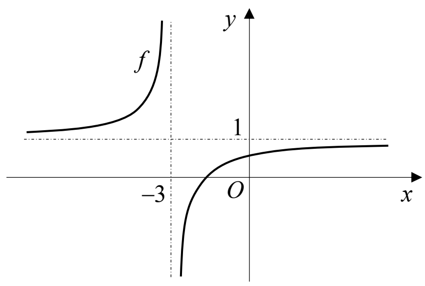
- o triângulo $[ABC]$ representa o terreno a vedar;
- o segmento $[BC]$ representa a vedação e os segmentos $[AB]$ e $[AC]$ representam partes dos muros existentes, sendo $\overline{AB} = x+2 \quad (x>0)$ e $\overline{AC} = y+1 \quad (y>0)$, em metros;
- o ponto P, que pertence a $[BC]$, representa o poste que dista 1 m de $[AB]$ e 2 m de $[AC]$.

8.1. Justifique que $y+1=\dfrac{x+2}{x}$ (atenda à semelhança dos triângulos).

8.2. Mostre que a área do terreno cercado é dada, em função de x, por $A(x)=\dfrac{(x+2)^2}{2x}$.

8.3. Determine as dimensões, x e y, para as quais a área do terreno cercado é mínima.

9. Na figura está uma representação gráfica de uma função racional f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.



As retas de equações $x=-3$ e $y=1$ são as únicas assíntotas do gráfico de f.

Sabe-se que a equação $5f(x)-2=k$ é impossível em $\mathbb{R}$.

O valor de k é:

(A) -17 **(B)** -3 **(C)** 1 **(D)** 3

Fim da prova

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item								
Cotação (em pontos)								
5.	**6.1.**	**6.2.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**8.3.**	**9.**	
10	14	14	10	14	14	14	10	**100**
TOTAL (Caderno1 + Caderno2)								**200**

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \ , \quad (n \in \mathbb{R})$$

Proposta de resolução

Caderno 1

1. $A(0,1,5)$; $V(a,b,4)$; $C(2,c,-3)$

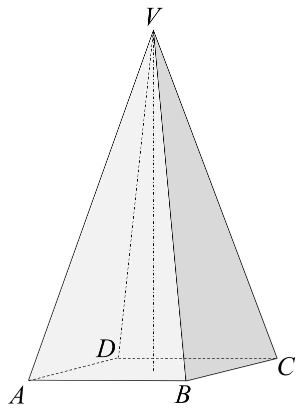
$r:(x,y,z)=(-1,0,0)+k(2,2,1),\ k\in\mathbb{R}$

1.1. Dado que a reta r é perpendicular ao plano ABC, o vetor $\vec{r}=(2,2,1)$, vetor diretor da reta r, também é perpendicular a esse plano. Logo, uma equação do plano ABC é do tipo $2x+2y+z+d=0$.

Como o ponto $A(0,1,5)$ pertence ao plano ABC, vem

$2\times0+2\times1+5+d=0 \Leftrightarrow 7+d=0 \Leftrightarrow d=-7$

Portanto, $2x+2y+z-7=0$ é uma equação do plano ABC.



1.2. $V(a,b,4)$ é um ponto da reta r. Então

$(a,b,4)=(-1,0,0)+k(2,2,1),\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a,b,4)=(-1+2k,2k,k),\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1+2k \\ b=2k \\ 4=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=8 \\ k=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=8 \end{cases}$$

$C(2,c,-3)$ é um ponto do plano ABC: $2x+2y+z-7=0$. Então:

$2\times2+2c-3-7=0 \Leftrightarrow 2c=6 \Leftrightarrow c=3$

Portanto, $V(7,8,4)$ e $C(2,3,-3)$.

1.3. $A(0,1,5)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(2,3,-3)-(0,1,5)=(2,2,-8)$

$\overrightarrow{AV}=V-A=(7,8,4)-(0,1,5)=(7,7,-1)$

$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{2^2+2^2+(-8)^2}=\sqrt{4+4+64}=\sqrt{72}=\sqrt{36\times2}=6\sqrt{2}$

$\|\overrightarrow{AV}\|=\sqrt{7^2+7^2+(-1)^2}=\sqrt{49+49+1}=\sqrt{99}=\sqrt{9\times11}=3\sqrt{11}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AV}=(2,2,-8)\cdot(7,7,-1)=14+14+8=36$

$$\cos\left(C\hat{A}V\right)=\cos\left(\overrightarrow{AC}\hat{\ ,}\overrightarrow{AV}\right)=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AV}}{\|\overrightarrow{AC}\|\times\|\overrightarrow{AV}\|}=\frac{36}{6\sqrt{2}\times3\sqrt{11}}=\frac{2}{\sqrt{22}}$$

Se $\cos\left(C\hat{A}V\right)=\dfrac{2}{\sqrt{22}}$, então $C\hat{A}V\approx 64,8^\circ$.

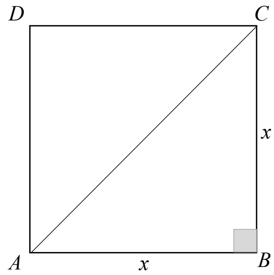
1.4. $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

A base da pirâmide é o quadrado $[ABCD]$ em que, como já vimos,

$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 3, -3) - (0, 1, 5) = (2, 2, -8)$ e

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

Se $\overline{AB} = x$ então a área da base é x^2.



$x^2 + x^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2$

$2x^2 = \left(\sqrt{72}\right)^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 72 \Leftrightarrow x^2 = 36$

$\text{Área da base} = x^2 = 36$

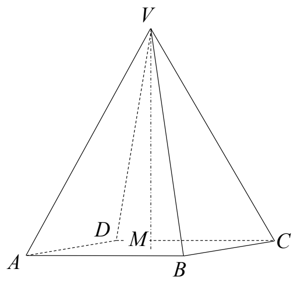
A altura da pirâmide é $\|\overrightarrow{MV}\|$ sendo M o centro da base, ou seja, o ponto médio de $[AC]$

$A(0, 1, 5)$; $C(2, 3, -3)$

$M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = (1, 2, 1)$

$\overrightarrow{MV} = V - M = (1, 2, 1) - (7, 8, 4) = (-6, -6, -3)$

$\|\overrightarrow{MV}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9$



$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 36 \times 9 = 108$

2. $180° - 46° - 51° = 83°$

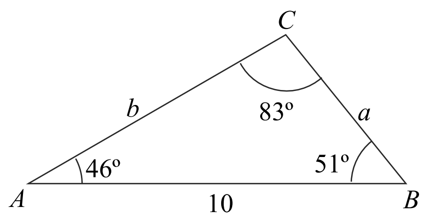
$A\hat{C}B = 83°$

Pela lei dos senos, temos:

$\frac{\sin 51°}{b} = \frac{\sin 83°}{10} \Leftrightarrow b = \frac{10 \sin 51°}{\sin 83°}$

$\overline{AC} = b \approx 7{,}83$

Resposta: **(A)**



3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{kx + x^2} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x+1} - x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

3.1. f é contínua em $x = 0$ se existir $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-3x}{kx+x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x-3)}{x(k+x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-3}{k+x} = -\frac{3}{k}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x+1}-x+1\right) = \sqrt{0+1}-0+1 = 2 = f(0)$$

Para que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ é necessário e suficiente que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -\frac{3}{k} = 2 \overset{k\neq 0}{\Leftrightarrow} 2k = -3 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$$

Portanto, se a função f é contínua em $x=0$ então $k=-\dfrac{3}{2}$.

3.2. Seja $y = mx+b$ a assíntota ao gráfico de f em $+\infty$, caso exista.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}-x+1}{x} \overset{\left(\frac{\infty-\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x} - \frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} + \lim_{x\to+\infty} \left(-1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} - 1 + 0 =$$

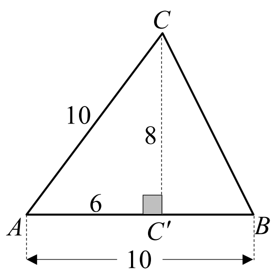
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} - 1 = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1 = 0 - 1 = -1$$

Se $x>0$, $\sqrt{x^2} = |x| = x$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-x+1+x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}+1\right) = +\infty$$

Logo, não existe assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

4. Seja C' a projeção ortogonal do ponto C na reta AB.



Pela definição de produto escalar,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overline{AB}\times\overline{AC'}$$

Dado que $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ e $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 60$, vem

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 60 \Leftrightarrow \overline{AB}\times\overline{AC'} = 60 \Leftrightarrow 10\times\overline{AC'} = 60 \Leftrightarrow \overline{AC'} = 6$$

O triângulo $[AC'C]$ é retângulo em C'. Logo

$$\overline{AC'}^2 + \overline{CC'}^2 = \overline{AC}^2$$

$$\overline{AC'}^2 + \overline{CC'}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 6^2 + \overline{CC'}^2 = 10^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{CC'}^2 = 100-36 \Leftrightarrow \overline{CC'}^2 = 64 \Leftrightarrow \overline{CC'} = 8$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB}\times\overline{CC'}}{2} = \frac{10\times 8}{2} = 40$$

Resposta: **(C)**

Caderno 2

5. $u_{500}=2 \wedge u_{n+1}+2=u_n\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{500}=2 \\ u_{n+1}=u_n-2\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão $r=-2$, sendo $u_{500}=2$

$u_{500}=u_1+(500-1)\times(-2) \Leftrightarrow 2=u_1-1000+2 \Leftrightarrow u_1=1000$ $\quad \left| u_n=u_1+(n-1)\times r \right.$

$u_{1001}=u_1+(1001-1)\times(-2)=1000+1000\times(-2)=-1000$

$S_{1001}=\dfrac{u_1+u_{1001}}{2}\times 1001=\dfrac{1000+(-1000)}{2}\times 1001=0$ $\quad \left| S_n=\dfrac{u_1+u_n}{2}\times n \right.$

Resposta: **(A)**

6. **6.1.** População após a campanha: $(200+x)$ milhares

População imigrante após campanha:

$0{,}055\times 200+x=11+x$, em milhares

Total da população		Imigrantes
$200+x$	——	$11+x$
100	——	$P(x)$

$P(x)=\dfrac{100(11+x)}{200+x} \Leftrightarrow P(x)=\dfrac{1100+100x}{200+x}$

6.2. $P(x)=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1100+10x}{200+x}=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1100+100x}{200+x}-10=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1100+100x-2000-10x}{200+x}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 90x-900=0 \wedge 200+x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 90x=900 \wedge x \neq -200 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{900}{90} \Leftrightarrow x=10$

Para que 10% da população seja constituída por imigrantes, devem aderir à campanha 10 milhares de imigrantes.

7. $\alpha = \arccos\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}\right)$, $\alpha \in [0, \pi]$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

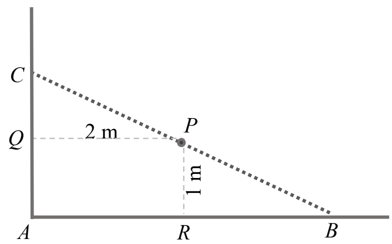
$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \wedge \alpha \in [0, \pi] \Leftrightarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\tan\alpha + 2\sin(2\alpha) = \tan\frac{2\pi}{3} + 2\sin\left(2\times\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -\tan\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} - 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

Resposta**: (B)**

8. $\overline{AB} = x + 2\text{ m}$ e $\overline{AC} = y + 1\text{ m}$



8.1. Os triângulos $[ABC]$ e $[RBP]$ são semelhantes (são triângulos retângulos com um ângulo agudo comum).

Logo, $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{RP}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{RB}}$.

Como $\overline{AC} = y + 1$, $\overline{RP} = 1$, $\overline{AB} = x + 2$ e $\overline{RB} = x$, temos

$$\frac{y+1}{1} = \frac{x+2}{x} \Leftrightarrow y + 1 = \frac{x+2}{x}$$

8.2. Área do triângulo $[ABC] = \dfrac{\overline{AB}\times\overline{AC}}{2} = \dfrac{(x+2)(y+1)}{2}$

$$y + 1 = \frac{x+2}{x} \Leftrightarrow y + 1 = \frac{x}{x} + \frac{2}{x} \Leftrightarrow y + 1 = 1 + \frac{2}{x} \Leftrightarrow y = \frac{2}{x}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{(x+2)(y+1)}{2} = \frac{(x+2)}{2}\times(y+1) =$$

$$= \frac{x+2}{2}\times\left(\frac{2}{x}+1\right) = \frac{x+2}{2}\times\frac{2+x}{x} = \frac{(x+2)^2}{2x}$$

Portanto, $A(x) = \dfrac{(x+2)^2}{2x}$, com $x > 0$.

8.3. $A'(x)=\frac{\left[(x+2)^2\right]' 2x-(x+2)^2(2x)'}{(2x)^2}=\frac{2(x+2)(x+2)' 2x-(x+2)^2\times 2}{4x^2}=$

$=\frac{4x(x+2)-2(x+2)^2}{4x^2}=\frac{4x^2+8x-2x^2-8x-8}{4x^2}=$

$=\frac{2x^2-8}{4x^2}=\frac{2(x^2-4)}{4x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}$

$A'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2-4}{2x^2}=0\wedge x>0\Leftrightarrow\left(x^2-4=0\wedge 2x^2\neq 0\right)\wedge x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x=2\vee x=-2)\wedge x>0\Leftrightarrow x=2$

x	0		2	$+\infty$
A'		$-$	0	$+$
A		$\searrow$		$\nearrow$
			Mín.	

Se $x=2$, $y=\frac{2}{2}=1$.

A área é mínima para $x=2$ e $y=1$.

9. $5f(x)-2=k\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5f(x)=k+2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=\frac{k+2}{5}$

O contradomínio de f é $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Se a equação é impossível, então $\frac{k+2}{5}=1$.

$\frac{k+2}{5}=1\Leftrightarrow k+2=5\Leftrightarrow k=3$

Resposta: **(D)**