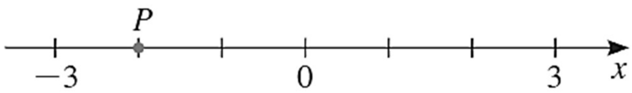
Nome do aluno | Nº | Data / / 20

# Osciladores harmónicos

1. Um ponto $P$ desloca-se numa reta numérica no intervalo de tempo $I = [0, 30]$ (medido em segundos), de tal forma que a sua abcissa é dada em função do tempo $t \in \mathrm{I}$ por:

$$x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$$




1.1. Indique a abcissa do ponto $P$ nos instantes $t = 0$ e $t = 2$.

1.2. Determine o número de vezes que, neste intervalo de tempo, o ponto $P$ passa na origem da reta numérica.

1.3. Determine os intervalos de monotonia e os extremos relativos da função $x$.

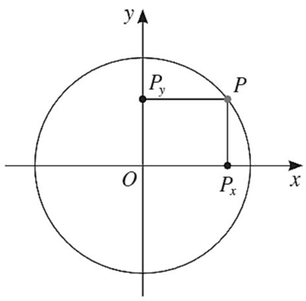
1.4. Determine expressões que definam a velocidade e a aceleração do ponto $P$, como funções de $t \in [0, 30]$.

1.5. Determine o período mínimo positivo da função definida em $\mathbb{R}$ por:

$$y(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

1.6. Esboce o gráfico da função $x$.

2. Considere, num referencial o.n. $xOy$ do plano, um ponto $P$ que se desloca sobre a circunferência trigonométrica a uma velocidade constante de 1 radiano por segundo, iniciando o seu movimento no ponto de coordenadas $(1, 0)$.




2.1. Justifique que os sistemas constituídos pelas projeções $P_x$ e $P_y$ do ponto $P$ sobre os eixos $Ox$ e $Oy$, respetivamente, constituem os respetivos eixos osciladores harmónicos.

2.2. Indique a amplitude, a pulsação e a fase de cada oscilador e determine o respetivo período e frequência.

3. Considere um ponto $P$ que se desloca sobre uma reta numérica no intervalo de tempo $[0, 8]$ (medido em segundos) de tal forma que a sua abcissa, como função de $t \in [0, 8]$, e dada pela expressão:

$$x(t) = 7\cos(4\pi t + \pi)$$

3.1. Indique a amplitude do movimento de $P$.

3.2. Determine o período deste oscilador harmónico.

3.3. Determine o número de oscilações que o ponto $P$ completa por segundo e diga qual é o significado do valor obtido para o oscilador.

**4.** A função definida por

$$f(t)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)$$

descreve, em função de $t\in[0,6]$ (em segundos), o movimento oscilatório de um corpo suspenso de uma mola, em metros.

**4.1.** Determine a amplitude, o período e a fase do oscilador.

**4.2.** Determine a velocidade da partícula no instante $t=2$.

**4.3.** Mostre que

$$f''(t)=-\frac{\pi^2}{4}\,f(t)$$

**4.4.** Determine os instantes em que o corpo se encontra mais afastado do ponto de equilíbrio do sistema.

**5.** Para certos valores reais $a$ e $b$ não nulos, a expressão

$$f(x)=a\sin(bx)$$

define uma função real de variável real.

**5.1.** Mostre que:

**5.1.1.** A diferença entre dois zeros consecutivos de $f$ é igual a metade do seu período.

**5.1.2.** A semissoma de dois zeros consecutivos de $f$ é zeros da sua derivada $f'$.

**5.1.3.** A derivada de segunda ordem de $f$ e $f$ têm os mesmos zeros.

**5.2.** Utilize os resultados demonstrados em 5.1 para esboçar o gráfico da função real de variável real definida por:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin(4x)$$

**Soluções**

**1.**

**1.1.**

$$x(0) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad x(2) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

**1.2.**

Período $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ Como $\dfrac{30}{6} = 5$ , o ponto $P$ passa $10$ vezes na origem.

**1.3.**

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} + 3k\ ,\ k = 1\ ,\ \ldots\ ,\ 10$$

decrescente $\left[-\dfrac{1}{2} + 6k, \dfrac{5}{2} + 6k\right] \cap [0, 30]$ $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

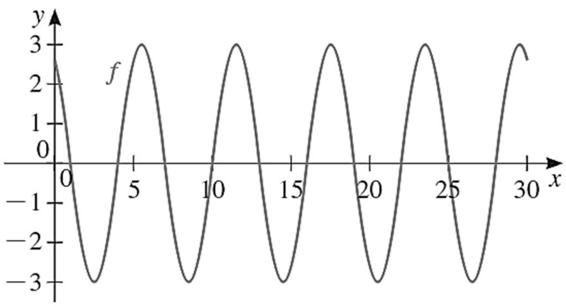
crescente $\left[\dfrac{5}{2} + 2k, \dfrac{11}{2} + 2k\right]$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Tem mínimo absoluto $-3$ e máximo $3$ , e mínimos relativos $x(0)$ e $x(30)$ .

**1.4.**

Respetivamente, $-\pi \sin\left(\dfrac{\pi}{3}t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ e $-\dfrac{\pi^2}{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

**1.5.**




**2.**

**2.1.**

$P_x(t) = \cos t$

$P_y(t) = \sin t \Leftrightarrow P_y(t) = \cos\left(t + \dfrac{3\pi}{2}\right)$

Ambas as equações são da forma $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ , $A > 0$ , $\omega > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$

**2.2.**

| | $P_x(t)$ | $P_y(t)$ |
|---|---|---|
| ($A$) Amplitude | 1 | 1 |
| ($\omega$) Pulsação | 1 | 1 |
| ($\varphi$) Fase | 0 | $\dfrac{3\pi}{2}$ |
| ($T$) Período | $\dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$ | $\dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$ |
| ($f$) Frequência | $\dfrac{1}{2\pi}$ | $\dfrac{1}{2\pi}$ |

**3.**

**3.1.** $A = 7$

**3.2.**

$\omega = 4\pi$

$T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

**3.3.**

$f = \frac{2}{1} = 2$, ou seja, o ponto $P$ efetua $2$ oscilações por segundo.

**4.**

$$f(t) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right), \text{ com } t \in [0, 6[$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{11\pi}{6}\right)$$

**4.1.**

$$\text{Amplitude} \rightarrow \frac{1}{2} \qquad \omega = \frac{\pi}{2} \qquad \varphi = \frac{11\pi}{6}$$

$$T \rightarrow \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4}$$

**4.2.**

$$f'(t) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow f'(t) = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f'(2) = \frac{\pi}{4}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow f'(2) = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(2) = \frac{\pi}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{8}$$

**4.3.**

$$f''(t) = -\frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^2}{4} \times \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^2}{4}f(t)$$

**4.4.**

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{t}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{2} = \frac{1}{6} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \rightarrow t = \frac{1}{3} \checkmark$$

$$k = 1 \rightarrow t = \frac{7}{3} \checkmark$$

$$k = 2 \rightarrow t = \frac{13}{3} \checkmark$$

$$k = 3 \rightarrow t = \frac{19}{3} \times$$

**5.**

**5.1.**

**5.1.1.**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a\sin(bx) = 0 \Leftrightarrow bx = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{(k+1)\pi}{b} - \frac{k\pi}{b} = \frac{\pi}{b} \rightarrow \text{diferença entre dois zeros consecutivos}$$

$$f(p+x) = f(x) \Leftrightarrow a\sin(bp+bx) = a\sin(bx) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin(bp+bx) = \sin(bx) \Leftrightarrow bp = 2\pi \Leftrightarrow p = \frac{2\pi}{b} \rightarrow \text{período da função}$$

$$\frac{\pi}{b} = \frac{1}{2} \times p$$

**5.1.2.**

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(k+1)\pi}{b} + \frac{k\pi}{b}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2k\pi+\pi}{b}\right) = \frac{2k\pi+\pi}{2b} \rightarrow \text{semissoma de dois zeros consecutivos}$$

$$f'(x) = ab\cos(bx)$$

$$f'\left(\frac{2k\pi+\pi}{2b}\right) = ab\cos\left(\frac{2k\pi+\pi}{2b} \times b\right) = ab\cos\left(\frac{2k\pi+\pi}{2}\right) = ab\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -ab\sin(k\pi) = 0$$

**5.1.3.**

$$f''(x) = -ab^2\sin(bx)$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -ab^2\sin(bx) = 0 \Leftrightarrow \sin(bx) = 0 \Leftrightarrow bx = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}$$

**5.2.**

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(4x)$$