

Nome do aluno

N.º

Data

/ / 20

Domínio, zeros e sinal

1. Para cada uma das funções seguintes indique o domínio e, caso existam, determine os zeros:

1.1. $a(x) = \frac{2x-6}{x+1}$

1.3. $c(x) = \frac{2-x}{2x-4}$

1.2. $b(x) = x - \frac{1}{x}$

1.4. $d(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$

2. Resolva em \mathbb{R} :

2.1. $\frac{3x-1}{x+1} = 2$

2.2. $\frac{2}{1-x^2} = 3$

2.3. $\frac{x+2}{x^2-4} = -\frac{1}{4}$

3. Estude o sinal das funções f e g , reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = \frac{1-x}{2x+1} \quad e \quad g(x) = \frac{2x-x^2}{3x-1}$$

4. Resolva em \mathbb{R} :

4.1. $\frac{1-x}{x+1} \leq 0$

4.2. $\frac{2x+1}{x-1} > 5$

4.3. $\frac{7}{x^2-9} \geq -1$

5. Vários amigos criaram um grupo numa rede social na Internet. Admita que, t dias após a sua criação, o número de membros desse grupo, em dezenas, é dado, aproximadamente, por:

$$N(t) = \frac{300t+5}{t+10}, t \geq 0$$

5.1. Quantos amigos criaram o grupo?

5.2. Determine ao fim de quantos dias o grupo atingiu os 1500 membros.

5.3. O objetivo dos fundadores era ultrapassar os 2500 membros.
Ao fim de quantos dias é que isso aconteceu?

5.4. A rede social oferece um prémio aos criadores de grupos com pelo menos 3500 membros.
Quando receberão o prémio?

Soluções

1.

1.1.

$$D_a = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$a(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-6}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x=3 \wedge x \neq -1$$

Zero: 3

1.2.

$$D_b = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$b(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1) \wedge x \neq 0$$

Zeros: -1 e 1

1.3.

$$D_c = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$c(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x-4} = 0 \Leftrightarrow 2-x=0 \wedge 2x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x=2 \wedge x \neq 2$$

Não tem zeros.

1.4.

$$D_d = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$$

$$d(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+4}{x^2-16} = 0 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x^2-16 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=1 \vee x=4) \wedge (x \neq -4 \wedge x \neq 4)$$

Zero: 1

2.

2.1.

$$\frac{3x-1}{x+1} = 2 \Leftrightarrow \frac{3x-1-2x-2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-3=0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x=3 \wedge x \neq -1$$

C.S. = {3}

2.2.

$$\frac{2}{1-x^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{2-3+3x^2}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-1+3x^2}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1+3x^2=0 \wedge 1-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

2.3.

$$\frac{x+2}{x^2-4} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{4x+8+x^2-4}{4x^2-16} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x+4+x^2}{4x^2-16} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x+4+x^2=0 \wedge 4x^2-16 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4 \times 4}}{2} \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 2$$

C.S. = { }

3.

Para a função f :

$$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ e } 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Assim:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$1 - x$	+	+	+	0	-
$2x + 1$	-	0	+	+	+
$f(x)$	-	n.d.	+	0	-

f é positiva em $]-\frac{1}{2}, 1[$ e é negativa em $]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$.

Para a função g :

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \text{ e } 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Assim:

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{3}$		2	$+\infty$
$2x - x^2$	-	0	+	+	+	0	-
$3x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$g(x)$	+	0	-	n.d.	+	0	-

g é positiva em $]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, 2[$ e é negativa em $]0, \frac{1}{3}[\cup]2, +\infty[$.

4.

4.1.

Tem-se que:

$$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ e } x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Assim:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1 - x$	+	+	+	0	-
$x + 1$	-	0	+	+	+
$\frac{1 - x}{x + 1}$	-	n.d.	+	0	-

Portanto:

$$\frac{1 - x}{x + 1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$$

4.2.

$$\frac{2x + 1}{x - 1} > 5 \Leftrightarrow \frac{2x + 1 - 5x + 5}{x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-3x + 6}{x - 1} > 0$$

Tem-se que: $-3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ e $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Assim:

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$-3x + 6$	+	+	+	0	-
$x - 1$	-	0	+	+	+
$\frac{-3x + 6}{x - 1}$	-	n.d.	+	0	-

Portanto:

$$\frac{-3x + 6}{x - 1} > 0 \Leftrightarrow x \in]1, 2[$$

4.3.

$$\frac{7}{x^2 - 9} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{7 + x^2 - 9}{x^2 - 9} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2}{x^2 - 9} \geq 0$$

Tem-se que:

$$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ e } x^2 - 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

Assim:

x	$-\infty$	-3		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		3	$+\infty$
$x^2 - 2$	+	+	+	0	-	0	+	+	+
$x^2 - 9$	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{x^2 - 2}{x^2 - 9}$	+	n.d.	-	0	+	0	-	n.d.	+

Portanto:

$$\frac{x^2 - 2}{x^2 - 9} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup]3, +\infty[$$

5.

5.1.

$$N(0) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ dezenas}$$

Logo, 5 amigos criaram o grupo.

5.2.

$$N(t) = 150 \Leftrightarrow \frac{300t + 5}{t + 10} = 150 \Leftrightarrow \frac{300t + 5 - 150t - 1500}{t + 10} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{150t - 1495}{t + 10} = 0 \Leftrightarrow 150t - 1495 = 0 \wedge t + 10 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{299}{30} \approx 9,967 \wedge t \neq -10$$

O grupo atingiu os 1500 membros ao fim de 9 dias.

5.3.

$$N(t) = 250 \Leftrightarrow \frac{300t + 5}{t + 10} = 250 \Leftrightarrow \frac{300t + 5 - 250t - 2500}{t + 10} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{50t - 2495}{t + 10} = 0 \Leftrightarrow 50t - 2495 = 0 \wedge t + 10 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{499}{10} = 49,9 \wedge t \neq -10$$

Ao fim de 49 dias.

5.4.

$$N(t) = 350 \Leftrightarrow \frac{300t + 5}{t + 10} = 350 \Leftrightarrow \frac{300t + 5 - 350t - 3500}{t + 10} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-50t - 3495}{t + 10} = 0 \Leftrightarrow -50t - 3495 = 0 \wedge t + 10 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{699}{10} = -69,9 \wedge t \neq -10$$

Nunca vão atingir os 3500 membros; logo, nunca receberão o prémio.