Nome do aluno | Nº | Data / / 20

Limites infinitos

1. Prove, usando a definição, que:

 1.1. $\lim(5n^2) = +\infty$

 1.2. $\lim\left(-\sqrt{n}\right) = -\infty$

2. Considere a sucessão de termo geral:

$$u_n = \begin{cases} n+3 & se\ n\ é\ par \\ 3n & se\ n\ é\ ímpar \end{cases}$$

 2.1. Estude a monotonia de (u_n).

 2.2. Mostre que $u_n \to +\infty$.

Soluções

1.

1.1.

Para qualquer $L > 0$, como qualquer natural é positivo, tem-se

$$5n^2 > L \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{L}{5}}$$

Então, considerando p igual ao menor natural superior a $\sqrt{\frac{L}{5}}$, tem-se, para todo o natural n, $n \geqslant p \Rightarrow 5n^2 > L$.

Como $L > 0$ pode ser qualquer, tem-se que $\lim 5n^2 = +\infty$.

1.2.

Analogamente à alínea a), como $-\sqrt{n} < -L \Leftrightarrow \sqrt{n} > L \Leftrightarrow n > L^2$, basta, para cada $L > 0$, escolher p como sendo o menor natural superior a L^2 para que a proposição $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow -\sqrt{n} < -L$ seja verdadeira.

Portanto, $\lim\left(-\sqrt{n}\right) = -\infty$.

2.

2.1.

Calculando o 8.º, o 9.º e o 10.º termos da sucessão, tem-se que $u_8 = 11$, $u_9 = 27$ e $u_{10} = 13$; logo, $u_8 < u_9$ e $u_9 > u_{10}$ e, sendo assim, (u_n) é não monótona.

2.2.

Provar que $\lim(u_n) = +\infty$ é o mesmo que provar que para qualquer número real $L > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow u_n > L$.

Para n par:

$$n + 3 > L \Leftrightarrow n > L - 3$$

Para n ímpar:

$$3n > L \Leftrightarrow n > \frac{L}{3}$$

Portanto, basta, para cada $L > 0$, considerar p igual ou superior ao menor natural que verifica simultaneamente as condições $n > L - 3$ e $n > \frac{L}{3}$, que se sabe existir, para que a proposição $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow u_n > L$ seja verdadeira.

Fica, assim, provado, por definição, que $u_n \to +\infty$, isto é, $\lim u_n = +\infty$.