Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

Derivadas das funções trigonométricas

1. Calcule:

1.1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{x}$

1.2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2}$

1.3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

1.4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(4x)}{2x}$

1.5. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin}{\pi - x}$

1.6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\cos^2 x - 2}{x^3}$

1.7. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(2x)}{\sin^2 x}$

1.8. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{\sin(\pi x)}$

2. Averigue se o gráfico da função f definida por

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

em $]0, 2\pi[$ admite assíntotas verticais.

3. Considere a função h definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{\pi}\right)}{\pi x} & se\ x \neq 0 \\ k & se\ x = 0 \end{cases}$$

em que k é um número real.
Determine o valor de k de modo que h seja contínua em $x = 0$.

4. Seja f a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \sin(2x)$$

Utilize a definição de derivada num ponto para determinar $f'(\pi)$.

5. Determine uma expressão da derivada de cada uma das seguintes funções:

5.1. $f(x) = x - 3\sin x$

5.2. $g(x) = x \sin x$

5.3. $h(x) = \sin\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$

5.4. $f(x) = -x + \cos(3x)$

5.5. $g(x) = \frac{x}{\cos x}$

5.6. $h(x) = \frac{1 + \sin x}{x + \cos x}$

5.7. $i(x) = 2 - \cos^3 x$

5.8. $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

5.9. $g(x) = (1 + \tan x)^2$

5.10. $h(x) = \frac{\tan(3x)}{x^3}$

6. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R} \backslash \{0\}$, definida por:

$$g(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

6.1. Estude a função g quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico.

6.2. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$.

7. Para a, b e n, números reais positivos, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = a\cos(nx) + b\sin(nx)$$

Seja f''a segunda derivada da função f.

Mostre que $f''(x) + n^2 f(x) = 0$ para qualquer número real x.

8. Considere a função f real de variável real, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, definida analiticamente por:

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

Nas questões seguintes recorra a processos exclusivamente analíticos.

8.1. Determine, caso existam, os extremos relativos de f.

8.2. Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

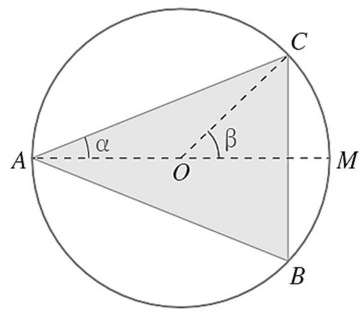
9. Seja f a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \sin(2x)\tan x$$

Mostre que:

$$f'(x) = 2\sin(2x)$$

10. Considere um triângulo $[ABC]$ isósceles ($\overline{AB} = \overline{AC}$), inscrito numa circunferência de centro O e raio 1, tal que a altura do triângulo, relativa ao vértice A, está contida no diâmetro $[AM]$ da circunferência.



Seja α a amplitude do ângulo MAC e β a amplitude do ângulo MOC.

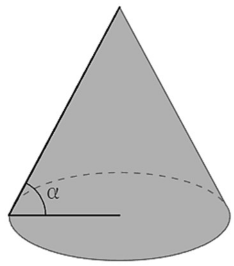
10.1. Justifique que $\beta = 2\alpha$.

10.2. Mostre que o perímetro do triângulo é dado em função de α por:

$$P(\alpha) = 2\sin(2\alpha) + 4\cos\alpha$$

10.3. Determine o valor máximo do perímetro do triângulo.

11. Considere todos os cones de revolução cuja geratriz mede $8\ cm$.



Determine a amplitude do ângulo α, arredondada à centésima do radiano, que a geratriz faz com a base do cone, de modo que este tenha volume máximo.

12. De uma função h, de domínio $]0, 2\pi[$, sabe-se que h' tem domínio $]0, 2\pi[$ e é definida por:

$$h'(x) = 2\sin(2x) - 4\cos x$$

12.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

12.1.1. Determine:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{h(x) - h(\pi)}{\pi - x}$$

12.1.2. Estude h quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

12.2. O gráfico de h contém dois pontos onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares. Recorrendo à calculadora gráfica, determine valores arredondados às décimas para a abcissa desses pontos. Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s), assim como os pontos considerados relevantes.

Soluções

1.

1.1.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x}$, então, não existe $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$.

1.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$$

1.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x\times x^3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=$$

$$=1\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\times\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)=$$

$$=1\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)=1\times 1\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

1.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{2x}=2\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{4x}=2\times 1=2$$

1.5.

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{\pi-x}\overset{(*)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi-y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

(*) Fazendo $y=\pi-x$, $y\to 0$ se $x\to\pi$.

1.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x-2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\cos^2 x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{x}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{x}\right)\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{x}\right)\times 1\times 1=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{x}\right)$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{2}{x}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{2}{x}\right)=-\infty$

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x-2}{x^3}$.

1.7.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(2x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\times\frac{x}{\sin x}\times\frac{2}{\sin x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(2x)}{2x}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\sin x}=1\times 1\times\frac{2}{\sin 0^+}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

1.8.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{\sin(\pi x)}\overset{(*)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{y(2-y)}{\sin(\pi-\pi y)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y(2-y)}{\sin(\pi y)}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi y}{\sin(\pi y)}\times(2-y)\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\times\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}}\times\lim_{y\to 0}(2-y)=\frac{1}{\pi}\times 1\times 2=\frac{2}{\pi}$$

(*) Fazendo $y=1-x$, $y\to 0$, se $x\to 1$.

2.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{\sin x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\left(2\times\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}-\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\overset{(*)}{=}$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}}-\lim_{y\to 0^+}\frac{2\sin y\cos y}{2\sin y}=1-\lim_{y\to 0^+}\cos y=1-1=0$$

(*) Fazendo $y=\frac{x}{2}$, $y\to 0^+$ se $x\to 0^+$

$x=0$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

$$\lim_{x\to 2\pi^-}f(x)=\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{x-\sin x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{2\pi-\sin(2\pi)}{2\sin\pi}=\frac{2\pi}{2\times 0^+}=+\infty$$

$x=2\pi$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

f é contínua no seu domínio por ser composta por funções contínuas e, como tal, não admite outras assíntotas verticais.

3.

Por um lado,

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{\pi}\right)}{\pi x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{\pi}\right)}{\frac{x}{\pi}} \times \frac{1}{\pi^2} \overset{(*)}{=}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} \times \frac{1}{\pi^2} = 1 \times \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi^2}$$

(*) Fazendo $y = \frac{x}{\pi}$, $y \to 0$, se $x \to 0$.

Por outro lado, $h(0) = k$.

h é contínua em $x = 0$ se $\lim_{x\to 0} h(x) = h(0)$, pelo que $k = \frac{1}{\pi^2}$.

4.

$$f'(\pi) = \lim_{x\to\pi}\frac{f(x) - f(\pi)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{\sin(2x) - \sin(2\pi)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{\sin(2x)}{x-\pi} \overset{(*)}{=}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\sin(2y+2\pi)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin(2y)}{2y} \times 2 = 2 \times 1 = 2$$

(*) Fazendo $y = x - \pi$, $y \to 0$, se $x \to \pi$.

5.

5.1. $f'(x) = (x - 3\sin x)' = 1 - 3\cos x$

5.2. $g'(x) = (x\sin x)' = \sin x + x\cos x$

5.3.

$$h'(x) = \left[\sin\left(\frac{x+1}{x^2}\right)\right]' = \left(\frac{x+1}{x^2}\right)'\cos\left(\frac{x+1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{x^2 - 2x(x+1)}{x^4}\cos\left(\frac{x+1}{x^2}\right) = \frac{-x^2-2x}{x^4}\cos\left(\frac{x+1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{x+2}{x^3}\cos\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$$

5.4. $f'(x) = (-x + \cos(3x))' = -1 - 3\sin(3x)$

5.5.

$$g'(x) = \left(\frac{x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$$

5.6.

$$h'(x) = \left(\frac{1+\sin x}{x+\cos x}\right)' = \frac{\cos x(x+\cos x) - (1+\sin x)(1-\sin x)}{(x+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{x\cos x + \cos^2 x - 1 + \sin^2 x}{(x+\cos x)^2} = \frac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}$$

5.7. $i'(x) = (2 - \cos^3 x)' = 3\cos^2 x\,\sin x$

5.8.

$$f'(x) = \left(\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \frac{2}{\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

5.9.

$$g'(x) = ((1 + \tan x)^2)' = 2(1 + \tan x) \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 + 2\tan x}{\cos^2 x}$$

5.10.

$$h'(x) = \left(\frac{\tan(3x)}{x^3}\right)' = \frac{\frac{3}{\cos^2(3x)} \times x^3 - 3x^2 \tan(3x)}{(x^3)^2} =$$

$$= \frac{\frac{3x}{\cos^2(3x)} - 3\tan(3x)}{x^4} = \frac{3}{x^3\cos^2(3x)} - \frac{3\tan(3x)}{x^4}$$

6.

6.1.

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-}\left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x}\right) = 1 \times \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x}\right) = 1 \times \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Assim, $x = 0$ é a assíntota vertical ao gráfico de g.

g é contínua no seu domínio por ser o quociente de funções contínuas, logo, não admite outras assíntotas verticais.

6.2.

$$g'(x) = \left(\frac{\sin x}{x^2}\right)' = \frac{x^2\cos x - 2x\sin x}{x^4} = \frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}$$

$$m = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3} = -\frac{2}{\frac{\pi^3}{8}} = -\frac{16}{\pi^3}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4}{\pi^2} \qquad P\left(\frac{\pi}{2}; \frac{4}{\pi^2}\right)$$

$y = mx + b$

$\frac{4}{\pi^2} = -\frac{16}{\pi^3} \times \frac{\pi}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} = \frac{12}{\pi^2}$

$y = -\frac{16}{\pi^3}x + \frac{12}{\pi^2}$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$.

7.

$$f'(x) = (a\cos(nx) + b\sin(nx))' = (a\cos(nx))' + (b\sin(nx))' =$$
$$= a(nx)'(-\sin(nx)) + (b(nx)'\cos(nx)) = -an\sin(nx) + bn\cos(nx)$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (-an\sin(nx) + bn\cos(nx))' =$$
$$= (-an\sin(nx))' + (bn\cos(nx))' =$$
$$= -an(nx)'\cos(nx) + bn(nx)'(-\sin(nx)) = -an^2\cos(nx) - bn^2\sin(nx) =$$
$$= -n^2(a\cos(nx) + b\sin(nx)) = -n^2(f(x))$$

Assim, temos que $f''(x) + n^2 f(x) = -n^2 f(x) + n^2 f(x) = 0$

8.

8.1.

$$f'(x) = (\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x\,,$$

em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.

f é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

f é decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

Mínimos relativos: $f(0) = 1$ e $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

Máximo relativo: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

8.2.

$$f''(x) = (\cos x - \sin x)' = -\sin x - \cos x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Equação impossível em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

$$f''(x) = -(\sin x + \cos x) < 0 \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

Assim, o gráfico de f não tem pontos de inflexão e a concavidade está voltada para baixo em todo o seu domínio.

9.

$$f'(x) = \left(\sin(2x)\tan x\right)' = \left(\sin(2x)\right)'\tan x + \sin(2x)(\tan x)' =$$

$$= 2\cos(2x)\tan x + \sin(2x) \times \frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x)\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos x}(\cos^2 x - \sin^2 x + 1) =$$

$$= \frac{2\sin x}{\cos x}(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 1) = \frac{2\sin x}{\cos x} \times 2\cos^2 x =$$

$$= 2 \times 2\sin x\cos x = 2\sin(2x)$$

10.

10.1.

Sabe-se que $A\widehat{O}C + A\widehat{C}O + C\widehat{A}O = \pi$ e que $A\widehat{O}C + C\widehat{O}M = \pi$.

Como o triângulo $[AOC]$ é isósceles ($[AO]$ e $[CO]$ são raios da circunferência), tem-se que $A\widehat{C}O = C\widehat{A}O = \alpha$.

Assim: $A\widehat{O}C + A\widehat{C}O + C\widehat{A}O = A\widehat{O}C + C\widehat{O}M \Leftrightarrow 2\alpha = \beta$

10.2.

$P_{[ABC]} = \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{BC}$

$\sin\beta = \overline{CM}$, logo, $\overline{BC} = 2\sin\beta = 2\sin(2\alpha)$

$\cos\beta = \overline{OM}$

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = (1 + \cos\beta)^2 + \sin^2\beta =$

$= 1 + 2\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\beta =$

$= 1 + 2\cos\beta + 1 = 2 + 2\cos(2\alpha) =$

$= 2 + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$

$= 2 + 2(\cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha) =$

$= 2 + 2(2\cos^2\alpha - 1) =$

$= 2 + 4\cos^2\alpha - 2 \underset{\overline{AC} > 0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{4\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2\cos\alpha$

$P(\alpha) = 2\sin(2\alpha) + 2 \times 2\cos\alpha$

$P(\alpha) = 2\sin(2\alpha) + 4\cos\alpha$

10.3.

$P'(\alpha) = (2\sin(2\alpha) + 4\cos\alpha)' = 2 \times 2\cos(2\alpha) - 4\sin\alpha =$

$= 4\cos(2\alpha) - 4\sin\alpha$

$P'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 4\cos(2\alpha) - 4\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 4\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha) - 4\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(1 - 2\sin^2\alpha) - 4\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 - 8\sin^2\alpha - 4\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = -1 \vee \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee \alpha = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \alpha = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

em $]0, 2\pi[$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

	0	$\frac{\pi}{6}$	
$P''(\alpha)$	$+$	0	$-$
P	↗	Máx.	↘

$$P\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

O valor máximo do perímetro do triângulo é $3\sqrt{3}$ u.m.

11.

Sejam r o raio de base do cone e h a altura.

$\sin\alpha = \frac{h}{8} \Leftrightarrow h = 8\sin\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{r}{8} \Leftrightarrow r = 8\cos\alpha$

$$V(\alpha) = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h \Leftrightarrow V(\alpha) = \frac{1}{3} \times \pi \times (8\cos\alpha)^2 \times 8\sin\alpha \Leftrightarrow$$

$$V(\alpha) = \frac{512\pi}{3}\sin\alpha\cos^2\alpha$$

$$V'(\alpha) = \left(\frac{512\pi}{3}\sin\alpha\cos^2\alpha\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V'(\alpha) = \frac{512\pi}{3}\cos\alpha \times \cos^2\alpha - \frac{512\pi}{3} \times \sin\alpha \times 2\cos\alpha \times \sin\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V'(\alpha) = \frac{512\pi}{3} \times (\cos^3\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha)$$

$$V'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{512\pi}{3} \times (\cos^3\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^3\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha\,(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \lor \cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \lor 1 - 3\sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \lor \sin^2\alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \lor \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \lor \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \lor \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\alpha = 0{,}62$ rad .

	0		$0{,}62$		$\frac{\pi}{2}$
$V'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
V		↗	Máx.	↘	

O volume do cone é máximo para $\alpha = 0{,}62$ rad .

12.

12.1.

12.1.1.

$$\lim_{x \to \pi}\frac{h(x) - h(\pi)}{\pi - x} = \lim_{x \to \pi} -\frac{h(x) - h(\pi)}{x - \pi} = -h'(\pi) =$$

$$= -(2\sin(2\pi) - 4\cos(\pi)) = -4$$

12.1.2.

$h''(x) = \left(2\sin(2x) - 4\cos(x)\right)' = 2 \times 2\cos(2x) + 4\sin(x) =$

$= 4\cos(2x) + 4\sin(x)$

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos(2x) + 4\sin x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

em $]0, 2\pi[$: $x = \dfrac{\pi}{2} \vee x = \dfrac{7\pi}{6} \vee x = \dfrac{11\pi}{6}$.

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$h''(x)$	n.d.	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	n.d.
$h(x)$	n.d.	$\cup$		$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	n.d.

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right]$.

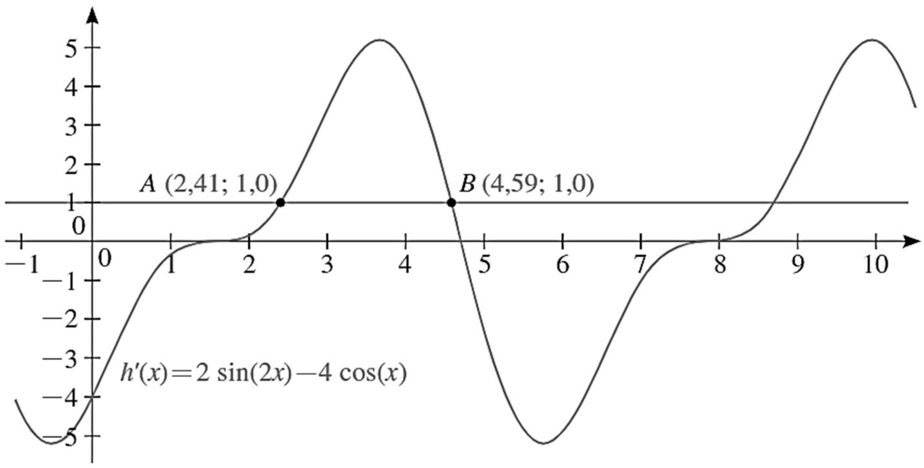
O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$; $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{6}\right]$ e em $\left[\dfrac{11\pi}{6}; 2\pi\right[$.

O gráfico de h tem dois pontos de inflexão de abcissas $\dfrac{7\pi}{6}$ e $\dfrac{11\pi}{6}$.

12.2.

Se a reta tangente ao gráfico de h é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, então, tem declive 1.

$h(x) = 1$



As abcissas dos pontos referidos são $x_1 \approx 2{,}4$ e $x_2 \approx 4{,}6$.