Nome do aluno | Nº | Data / / 20

# Conjuntos de pontos definidos por condições em $\mathbb{C}$

**1.** Identifique o conjunto dos pontos do plano complexo definido por:

**1.1.** $|z-1|=1$

**1.2.** $Im(z)=2$

**1.3.** $Re(z)=-3$

**1.4.** $|z-2+3i|=5$

**2.** Represente, no plano complexo, as regiões do plano complexo definidas por:

**2.1.** $|z-1-i|\leq 2$

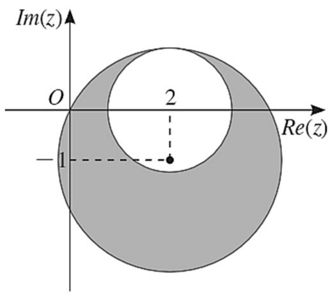
**2.2.** $|z-1-i|\leq 2 \wedge Re(z)>1$

**2.3.** $|z-1|=|z-i|$

**2.4.** $|z|\geq 2 \wedge |z|\leq 3$

**2.5.** $|z-2|\leq 2 \vee |z|\leq 3$

**3.** Indique uma condição em $\mathbb{C}$ que defina a região do plano representada a cinzento (incluindo a fronteira) na figura seguinte.




**4.** Represente no plano complexo os conjuntos definidos por:

**4.1.** $|z-2|=|z-2i|$

**4.2.** $|z-4+3i|\leq|z-4i| \wedge Im(z)=4$

**4.3.** $|z-3i|\geq 3 \wedge |z-3-i|\leq|z-i|$

**4.4.** $|z-3-i|\geq|z-i| \wedge \left|z-\frac{1}{2}-i\right|\geq 2$

**4.5.** $\frac{\pi}{6}\leq Arg(z)\leq\frac{3\pi}{2}$

**4.6.** $Arg(z)=\frac{\pi}{3} \wedge |z|<4$

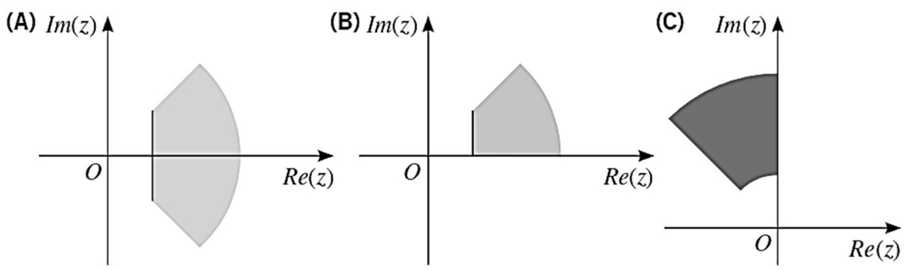
**4.7.** $Arg(z-1-i)=0 \wedge |z|<3$

**5.** Faca corresponder a cada condição em $\mathbb{C}$ o respetivo conjunto do plano complexo:

**I.** $|z|\leq 3 \wedge 0\leq Arg(z)\leq\frac{\pi}{4} \wedge Re(z)\geq 1$

**II.** $|z|\leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4}\leq Arg(z)\leq\frac{\pi}{4} \wedge Re(z)\geq 1$

**III.** $1\leq|z|\leq 3 \wedge \frac{\pi}{2}\leq Arg(z)\leq\frac{3\pi}{4}$



**6.** Represente, no plano complexo, o conjunto dos pontos definidos pelas seguintes condições:

**6.1.** $1 \leq |z+i| < 3 \ \wedge \ -\frac{\pi}{2} \leq Arg(z) \leq 0$

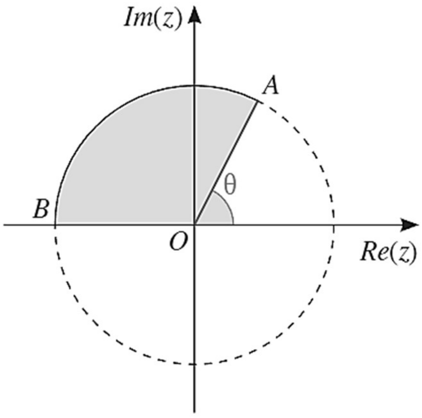
**6.2.** $|z+2i| < |z-4+i| \ \wedge \ Im(z-2) > 1 \ \wedge \ \frac{\pi}{4} \leq Arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$

**6.3.** $\left|\left(1+\sqrt{3}i\right)(z-2i)\right| \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq Arg(z) \leq \pi$

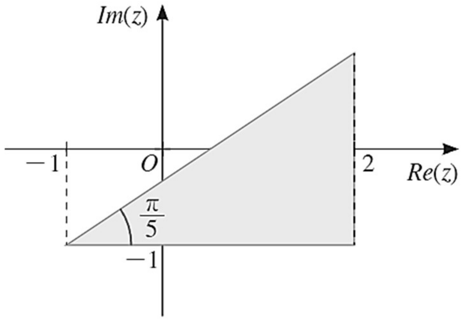
**6.4.** $\left|3e^{i\pi}\right| < z\bar{z} + 2Re(z) \leq |-5i|$

**7.** Nas figuras seguintes estão representadas, no plano complexo, regiões coloridas.
Defina por uma condição em $\mathbb{C}$ cada uma dessas regiões.

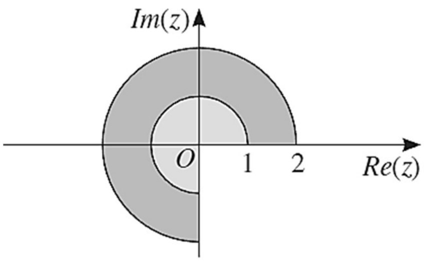
**7.1.** $A$ é o afixo de $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$



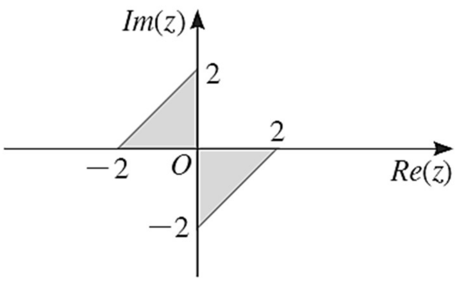

**7.2.**




**7.3.**




**7.4.**



**Soluções**

**1.**

**1.1.** $|z - 1| = 1 \rightarrow$ circunferência de centro no ponto de coordenadas $(1, 0)$ e raio 1 .

**1.2.** $Im(z) = 2 \rightarrow$ reta horizontal que passa no ponto de coordenadas $(0, 2)$ .

**1.3.** $Re(z) = -3 \rightarrow$ reta vertical que passa no ponto de coordenadas $(-3, 0)$ .

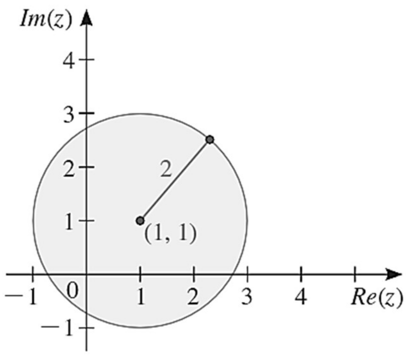
**1.4.**

$|z - 2 + 3i| = 5 \Leftrightarrow |z - (2 - 3i)| = 5 \rightarrow$ circunferência de centro no ponto de coordenadas $(2, -3)$ e raio $5$ .

**2.**

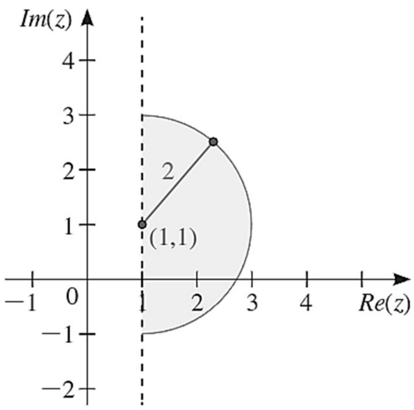
**2.1.**

$|z - 1 - i| \leqslant 2 \Leftrightarrow |z - (1 + i)| \leqslant 2$

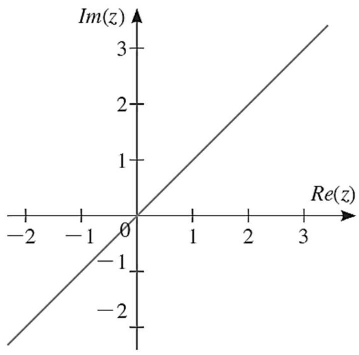



**2.2.**

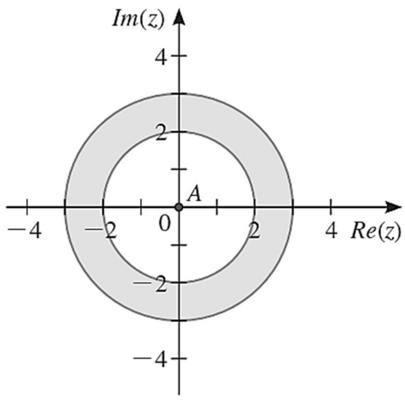
$|z - 1 - i| \leqslant 2 \wedge Re(z) > 1$



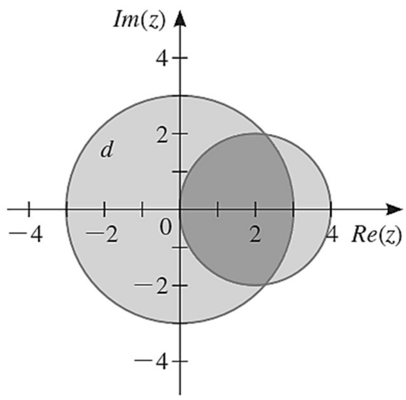

**2.3.**




**2.4.** S




**2.5.**



**3.**

$|2 - i| = \sqrt{5}$

O ponto de tangência das duas circunferências é o afixo de $2 + (\sqrt{5} - 1)i$ .

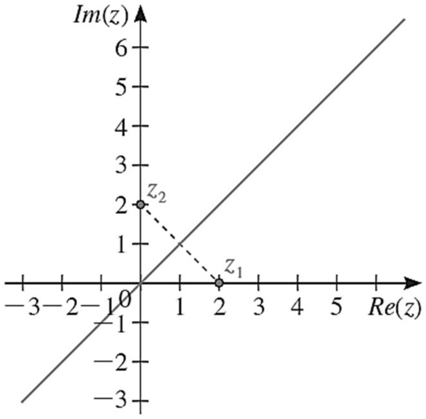
Então, $\sqrt{5} - 1$ é o raio do circulo menor.

Condição: $|z - 2 + i| \leqslant \sqrt{5} \wedge |z - 2| \geqslant \sqrt{5} - 1$

**4.**

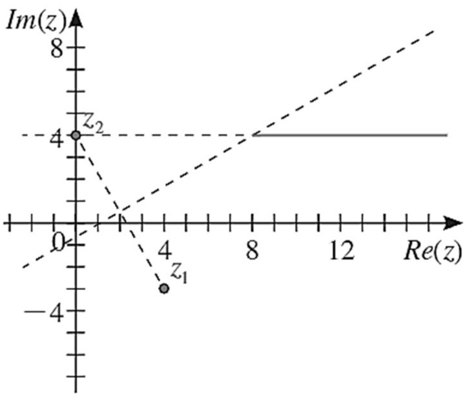
**4.1.**

$|z - 2| = |z - 2i|$



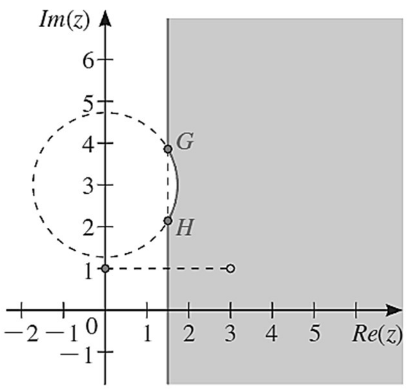

**4.2.**

$|z - 4 + 3i| \leqslant |z - 4i| \wedge$
$\wedge\ Im(z) = 4$



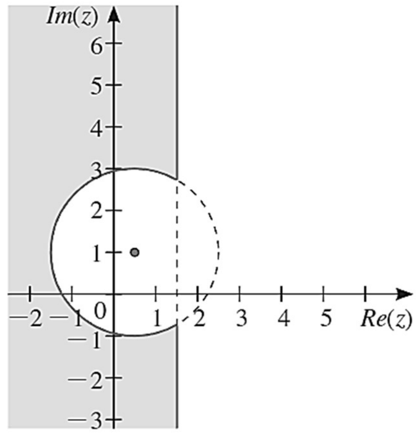

**4.3.**

$|z - 3i| \geqslant 3 \wedge |z - 3 - i| \leqslant |z - i|$



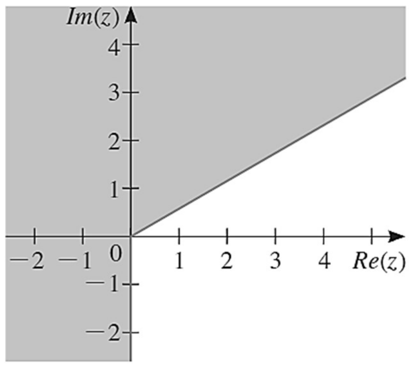

**4.4.**

$|z - 3 - i| \geqslant |z - i| \wedge$
$\wedge \left|z - \frac{1}{2} - i\right| \geqslant 2$



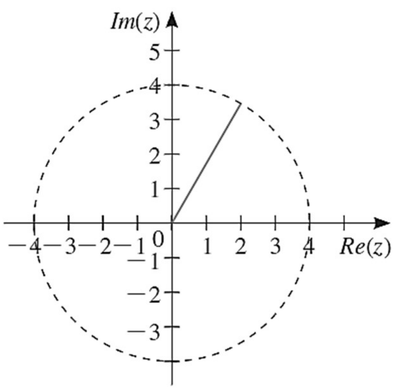

**4.5.**

$\frac{\pi}{6} \leqslant Arg(z) \leqslant \frac{3\pi}{2}$



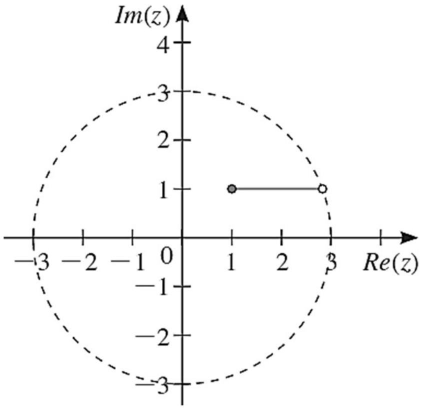

**4.6.**

$Arg(z) = \frac{\pi}{3} \wedge |z| < 4$



**4.7.**

$$Arg(z-1-i)=0 \wedge |z|<3$$

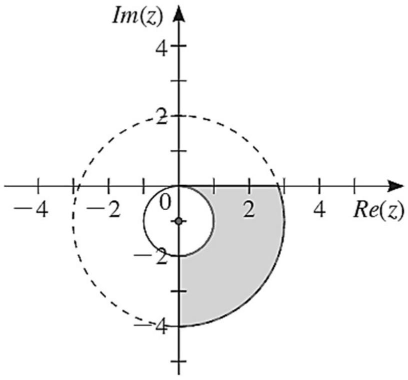



**5.** I → B II → A III → C

**6.**

**6.1.**

$$1 \leqslant |z+i| < 3 \wedge -\frac{\pi}{2} \leqslant Arg(z) \leqslant 0$$



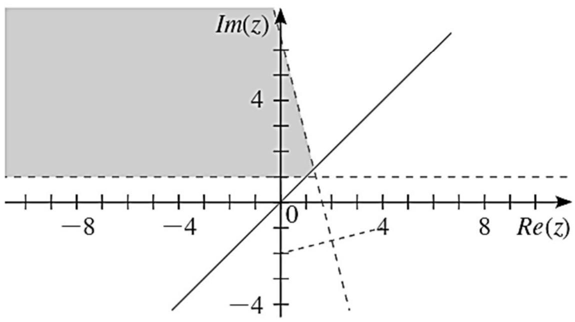

**6.2.**

$$|z+2i|<|z-4+i| \wedge Im(z-2)>1 \wedge \frac{\pi}{4} \leqslant Arg(z) \leqslant \frac{5\pi}{4}$$

$$|z-(-2i)|<|z-(4-i)| \wedge Im(z-2)>1 \wedge \frac{\pi}{4} \leqslant Arg(z) \leqslant \frac{5\pi}{4}$$

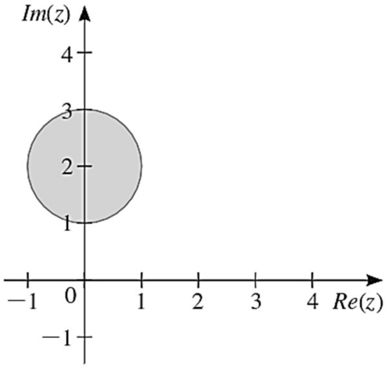
Se $z=x+yi$

$Im(x+yi-2)>1 \Leftrightarrow y>1$



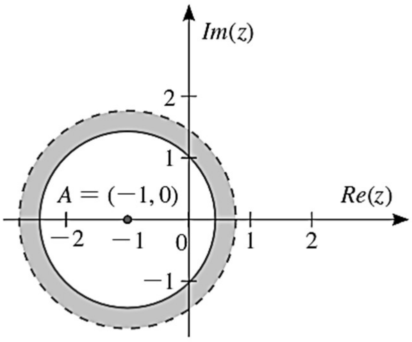
**6.3.**

$$\left|(1+\sqrt{3}\,i)(z-2i)\right| \leqslant 2 \Leftrightarrow |1+\sqrt{3}\,i||z-2i| \leqslant 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1+3}\,|z-2i| \leqslant 2 \Leftrightarrow 2|z-2i| \leqslant 2 \Leftrightarrow |z-2i| \leqslant 1$$
$$0 \leqslant Arg(z) \leqslant \pi$$




**6.4.**

$$|3e^{i\pi}| < z\bar{z} + 2Re(z) \leqslant |-5i| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 < a^2 + b^2 + 2a \leqslant 5 \Leftrightarrow 3 < a^2 + 2a + 1 - 1 + b^2 \leqslant 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 < (a+1)^2 + b^2 \leqslant 6 \Leftrightarrow 4 < |z+1|^2 \leqslant 6 \Leftrightarrow 2 < |z+1| \leqslant \sqrt{6}$$




**7.**

**7.1.**

O módulo de $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ é $|z_1| = 2$ e um argumento de $z_1$ é $\frac{\pi}{3}$.
Portanto, a região sombreada é definida pela condição:

$$|z| \leqslant 2 \wedge \frac{\pi}{3} \leqslant Arg(z) \leqslant \pi$$

**7.2.**

Os pontos da região a azul pertencem ao semiplano aberto definido pela reta vertical $Re(z) = 2$ e ao ângulo convexo de vértice na imagem geométrica de $z_1 = -1 - i$, cujos lados são uma semirreta horizontal e outra que faz com o semieixo real positivo um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{5}$ radianos. Então, a condição que define o subconjunto representado a azul é:

$$0 \leqslant Arg(z + 1 + i) \leqslant \frac{\pi}{5} \wedge Re(z) < 2$$

**7.3.**

$$1 \leqslant |z| \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant Arg(z) \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

**7.4.**

$$(Im(z+2) \leqslant Re(z+2) \wedge Im(z) \geqslant 0 \wedge Re(z) \leqslant 0) \vee$$
$$\vee\ (Im(z-2) \geqslant Re(z-2) \wedge Im(z) \leqslant 0 \wedge Re(z) \geqslant 0)$$