Nome do aluno	Nº	Data
		/ / 20

Binómio de Newton

1. Determine o desenvolvimento de $(x+y)^5$.

2. Recorrendo ao binómio de Newton, determine o desenvolvimento de:

2.1. $(a+2)^5$

2.2. $(ab+ac)^4$

3. Considere o desenvolvimento de $(2p+q^2)^{14}$. Determine:

3.1. Os três primeiros termos.

3.2. Os três últimos termos.

3.3. O termo central

3.4. A soma dos coeficientes binomiais.

4. Justifique que no desenvolvimento de $(3x+y)^7$ os coeficientes binomiais do 2º e do 7º termo são iguais.

5. No desenvolvimento do binómio $(x+y)^{30}$ determine o coeficiente do termo:

5.1. $x^{26}y^4$

5.2. x^4y^{26}

6. Seja f uma função real de variável real, tal que $f(x+1)=x^4$.

Determine o valor exato de $f\left(\sqrt{2}\right)$.

7. Calcule o 12º termo do desenvolvimento dos binómios:

7.1. $\left(x^2-\sqrt{y}\right)^{16} \quad (y \geq 0)$

7.2. $\left(\frac{1}{x}-y^2\right)^{21} \quad (x \neq 0)$

8. Considere o desenvolvimento do binómio $\left(x^3-\frac{3}{x}\right)^8$. Determine:

8.1. O termo central.

8.2. O termo independente de x.

8.3. O termo de grau 12.

8.4. A soma dos coeficientes dos seus termos.

Soluções

1.

$$(x+y)^5 = x^5 + {}^5C_1\, x^4y + {}^5C_2\, x^3y^2 + {}^5C_3\, x^2y^3 + {}^5C_4\, xy^4 + y^5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

2.

2.1.

$$(a+2)^5 = a^5 + {}^5C_1 a^4 \times 2 + {}^5C_2 a^3 \times 2^2 + {}^5C_3 a^2 \times 2^3 + {}^5C_4 a \times 2^4 + 2^5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+2)^5 = a^5 + 10a^4 + 40a^3 + 80a^2 + 80a + 32$$

2.2.

$$(ab+ac)^4 = (ab)^4 + {}^4C_1(ab)^3(ac) + {}^4C_2(ab)^2(ac)^2 + {}^4C_3(ab)(ac)^3 + (ac)^4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (ab+ac)^4 = a^4b^4 + 4a^4b^3c + 6a^4b^2c^2 + 4a^4bc^3 + a^4c^4$$

3.

3.1.

1.º termo: $T_1 = T_{0+1} = {}^{14}C_0\,(2p)^{14} \times (q^2)^0 = 16\,384p^{14}$

2.º termo: $T_2 = T_{1+1} = {}^{14}C_1\,(2p)^{13} \times (q^2)^1 = 14 \times 2^{13} \times p^{13} \times q^2 = 114\,688p^{13}q^2$

3.º termo: $T_3 = T_{2+1} = {}^{14}C_2\,(2p)^{12} \times (q^2)^2 = 91 \times 2^{12} \times p^{12} \times q^4 = 372\,736p^{12}q^4$

3.2.

$$T_{15} = T_{14+1} = {}^{14}C_{14}\,(2p)^{14-14} \times (q^2)^{14} = q^{28}$$
$$T_{14} = T_{13+1} = {}^{14}C_{13}\,(2p)^1 \times (q^2)^{13} = 14 \times 2p \times q^{26} = 28pq^{26}$$
$$T_{13} = T_{12+1} = {}^{14}C_{12}\,(2p)^2 \times (q^2)^{12} = 91 \times 2^2p^2q^{24} = 364p^2q^{24}$$

3.3.

Termo central $\rightarrow \dfrac{15+1}{2} = 8$ (8.º termo)

$T_8 = T_{7+1} = {}^{14}C_7\,(2p)^7 \times (q^2)^7 = 3432 \times 2^7 \times p^7 \times q^{14} = 439\,296p^7q^{14}$

3.4.

$${}^{14}C_0 + {}^{14}C_1 + {}^{14}C_2 + \ldots\ldots + {}^{14}C_{14} = 16\,384 = 2^{14}$$

4.

O 2.º termo é da forma: $T_2 = T_{1+1} = {}^7C_1\,(3x)^6y^1$

O 7.º termo é da forma: $T_7 = T_{6+1} = {}^7C_6\,(3x)^1\,y^6$

Os coeficientes binomiais são ${}^7C_1$ e ${}^7C_6$ e ${}^7C_1 = {}^7C_6$, pela lei da simetria.

5.

5.1.

$T_{p+1} = {}^{30}C_p\,x^{30-p}y^p$

$30 - p = 26 \wedge p = 4 \Rightarrow p = 4$

Assim, $T_5 = {}^{30}C_4\,x^{26}y^4 \Leftrightarrow T_5 = 27\,405x^{26}y^4$

Coeficiente: 27 405

5.2.

$T_{p+1} = {}^{30}C_p\,x^{30-p}y^p$

$30 - p = 4 \wedge p = 26 \Rightarrow p = 26$

Assim, $T_{27} = {}^{30}C_{26}\,x^4y^{26} \Leftrightarrow T_{27} = 27\,405x^4y^{26}$

Coeficiente: 27 405

6.

Seja $y = x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1$.

Temos que $f(y) = (y - 1)^4$, então:

$$f\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2} - 1\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 + {}^4C_1 \times \left(\sqrt{2}\right)^3 \times (-1) + {}^4C_2 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 \times (-1)^2 + {}^4C_3 \times \left(\sqrt{2}\right) \times (-1)^3 + (-1)^4$$

$$= 4 - 8\sqrt{2} + 12 - 4\sqrt{2} + 1 = 17 - 12\sqrt{2}$$

7.

7.1. $T_{12} = T_{11+1} = {}^{16}C_{11}\,(x^2)^5 \times \left(-\sqrt{y}\right)^{11} = -4368x^{10}y^5\sqrt{y}$

7.2. $T_{12} = T_{11+1} = {}^{21}C_{11}\,(x^{-1})^{10} \times (-y^2)^{11} = -352\,716x^{-10}y^{22}$

8.

8.1.

O desenvolvimento do binómio terá 9 termos. O termo central será o 5.º $\left(\dfrac{9+1}{2} = 5\right)$.

$T_5 = {}^8C_4(x^3)^4(-3x^{-1})^4 \Leftrightarrow T_5 = 5670x^8$

8.2.

Os termos deste desenvolvimento são da forma:

$T_{p+1} = {}^8C_p(x^3)^{8-p}(-3x^{-1})^p \Leftrightarrow T_{p+1} = {}^8C_p x^{24-4p}(-3)^p$

O termo independente de x é aquele em que o expoente de x é nulo, ou seja,

$24 - 4p = 0 \Leftrightarrow p = 6$

Substituindo na expressão dos termos deste desenvolvimento, obtemos:

$T_7 = {}^8C_6(-3)^6 \Leftrightarrow T_7 = 20\,412$

8.3.

O termo de grau 12 é aquele em que o expoente de x é 12 :

$24 - 4p = 12 \Leftrightarrow p = 3$

$T_4 = {}^8C_3x^{12}(-3)^3 \Leftrightarrow T_4 = -1512x^{12}$

8.4.

A soma dos coeficientes é dada por:

$${}^8C_0(-3)^0 + {}^8C_1(-3)^1 + {}^8C_2(-3)^2 + {}^8C_3(-3)^3 + {}^8C_4(-3)^4 +$$
$$+ {}^8C_5(-3)^5 + {}^8C_6(-3)^6 + {}^8C_7(-3)^7 + {}^8C_8(-3)^8 =$$
$$= {}^8C_0\,1^8 \times (-3)^0 + {}^8C_1\,1^7 \times (-3)^1 + {}^8C_2\,1^6 \times (-3)^2 +$$
$$+ {}^8C_3\,1^5 \times (-3)^3 + {}^8C_4\,1^4 \times (-3)^4 + {}^8C_5\,1^3 \times (-3)^5 +$$
$$+ {}^8C_6\,1^2 \times (-3)^6 + {}^8C_7\,1^1 \times (-3)^7 + {}^8C_8\,1^0 \times (-3)^8 =$$
$$= (1 + (-3))^8 = (-2)^8$$
$$= 256$$