Nome do aluno | Nº | Data / / 20

## Assíntotas não verticais ao gráfico de uma função

**1.** Determine as assíntotas aos gráficos das seguintes funções:

**1.1.** $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$

**1.2.** $g(x)=\frac{x^2-2x}{x+3}$

**1.3.** $h(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$

**1.4.** $i(x)=\frac{x^2}{2-|x|}$

**2.** Considere a função real de variável real $g$ definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2-x^2} & se\ x\geq 2\\[2ex] \dfrac{x^2+x}{x-2} & se\ x<2\end{cases}$$

**2.1.** Mostre que a reta de equação $x=2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de $g$.

**2.2.** Estude a função $g$ quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico e, caso existam, indique a sua equação reduzida.

**3.** Considere a função $h$, real de variável real, definida por:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & se\ x>0, x\neq 2\\[2ex] \dfrac{x}{|x|-1} & se\ x\leq 0, x\neq 1\end{cases}$$

**3.1.** Estude a continuidade de $h$.

**3.2.** Determine, caso existam, as assíntotas paralelas aos eixos coordenados ao gráfico de $h$.

**4.** Estude a função $g$, real de variável real, definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+1}{x} & se\ x<0\\ 4x & se\ 0\leq x<2\\ \dfrac{1-x}{x^2} & se\ x\geq 2\end{cases}$$

quanto à existência de assíntotas ao eu gráfico.

**5.** Estude as funções seguintes quanto à existência de assíntotas:

$$f(x)=\sqrt{4x^2+4x} \qquad e \qquad g(x)=\sqrt{\frac{x^4+x^2+1}{x^2}}$$

6. Dada uma função $f$, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que:

- $f$ é contínua;
- As retas de equação $x = 0$ e $y - 2x = 1$ são assíntotas ao gráfico de $f$.

6.1. Indique o valor de:

6.1.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$

6.1.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - 3x - 1}{x}$

6.2. Determine as assíntotas da função $g$ definida por $g(x) = 3 - 2f(x)$.

7. De uma função $f$, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a bissetriz dos quadrantes ímpares é uma assíntota ao seu gráfico.

Seja $g$ a função de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$$

Prove que o eixo $Ox$ é uma assíntota ao gráfico de $g$.

8. Considere a função $g$, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, em que se sabe que:

- $g$ é contínua;
- $g$ é par;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - 3x) = 1$
- O gráfico de $g$ tem uma assíntota vertical;
- $g$ não tem zeros.

Seja $h$ a função de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por:

$$h(x) = \frac{g(x)}{2x}$$

Mostre que o gráfico de $h$ admite uma assíntota vertical e duas assíntotas horizontais.

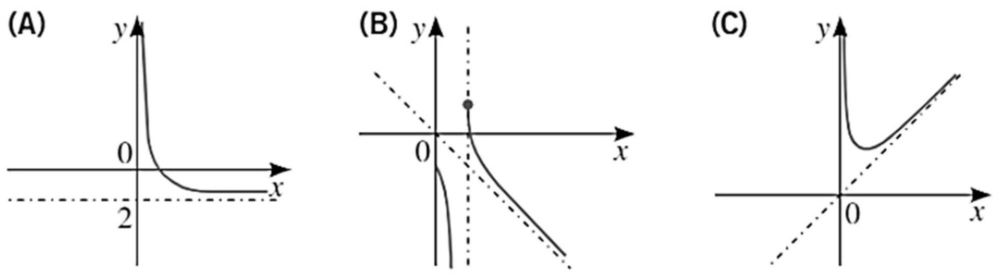
9. Considere a função $f$, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que:

**(I)** $f$ é contínua;

**(II)** O gráfico de $f$ tem duas assíntotas, uma vertical e outra oblíqua;

**(III)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$

Nenhum dos gráficos a seguir apresentados é o gráfico da função $f$.




Elabore uma composição na qual apresente, para cada um dos gráficos, um tópico pelo qual esse gráfico não pode ser o gráfico da função $f$.

Nota: só pode utilizar cada tópico, (I), (II) e (III), em cada gráfico.

**Soluções**

1.

1.1.

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

As retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais ao gráfico de $f$.

Como a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, não existem mais assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^3 - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Logo, não tem assíntotas oblíquas.

No entanto:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Logo, tem-se que a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico da função $f$.

1.2.

$D_g = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \to -3^-} g(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{x^2 - 2x}{x + 3} = \frac{15}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} g(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{x^2 - 2x}{x + 3} = \frac{15}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de $g$.

Como a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$, não existem mais assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2 - 2x}{x + 3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{x^2 - 2x}{x + 3} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x}{x + 3} = -5$$

Tem-se, assim, que a reta de equação $y = x - 5$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $g$ em $+\infty$ e em $-\infty$ (pois, efetuando cálculos análogos para $-\infty$, conclui-se que a reta é igualmente assíntota ao gráfico de $g$ em $-\infty$).

**1.3.**

$D_h = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de $h$.

Como a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, não existem mais assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Tem-se, assim, que a reta de equação $y = x + 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $h$ em $+\infty$ e em $-\infty$ (pois, efetuando cálculos análogos para $-\infty$, conclui-se que a reta é igualmente assíntota ao gráfico de $h$ em $-\infty$).

**1.4.**

$D_i = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \to -2^-} i(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{2 - |x|} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} i(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{2 - |x|} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} i(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{2 - |x|} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} i(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{2 - |x|} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

As retas de equações $x = -2$ e $x = 2$ são assíntotas verticais ao gráfico de $i$.

Como a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$, não existem mais assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{2 - |x|}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2x - x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (i(x) + x) = \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{x^2}{2 - x} + x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2 - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{i(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x^2}{2-|x|}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(i(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x}=-2$$

Tem-se, assim, que a reta de equação $y=-x-2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $i$ em $+\infty$ e a reta de equação $y=x-2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $i$ em $-\infty$ .

**2.**

**2.1.**

As restrições de $g$ aos intervalos $]-\infty, 2[$ e $[2, +\infty[$ são funções contínuas por serem racionais. Logo, para procurar assíntotas verticais, apenas faz sentido calcular:

$$\lim_{x\to2^-}g(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2+x}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\left(x+\frac{3x}{x-2}\right)=2+\frac{6}{0^-}=-\infty$$

Donde se conclui que a reta de equação $x=2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de $g$ .

**2.2.**

Para $x\to+\infty$ :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x^2}=-1$$

Conclui-se que a reta de equação $y=-1$ é assíntota horizontal ao gráfico de $g$ em $+\infty$ .

Para $x\to-\infty$ , vem:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x^2+x}{x-2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{x^2-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(g(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x}=3$$

Portanto, a reta de equação $y=x+3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $g$ em $-\infty$ .

**3.**

**3.1.**

As restrições de $h$ a $]-\infty, 0]\backslash\{-1\}$ e a $]0, +\infty[\backslash\{2\}$ são funções contínuas, pois são o quociente de funções contínuas.

$$\lim_{x\to0^-}h(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{|x|-1}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}$$

$$h(0)=0$$

Então, $\lim_{x\to0^+}g(x)\neq\lim_{x\to0^-}g(x)=h(0)$ , ou seja, não existe $\lim_{x\to0}h(x)$ , pelo que $h$ não é contínua em $0$ .

A função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 2\}$ .

**3.2.**

Calculem-se os limites laterais nos pontos $x = -1$ e $x = 2$ :

$$\lim_{x \to -1^-} h(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{|x| - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} h(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{|x| - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Calculem-se os limites em $-\infty$ e em $+\infty$ :

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x| - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x - 1} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x - 2} = 0$$

Tem-se que as retas de equações $x = -1$ e $x = 2$ são assíntotas verticais e as retas de equações $y = -1$ e $y = 0$ são assíntotas horizontais ao gráfico da função $h$ .

Como a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 2\}$ , não existem mais assíntotas verticais.

**4.**

$D_g = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x^2 + 1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} 4x = 0$$

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} 4x = 8$$

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1 - x}{x^2} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Tem-se que a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função $g$ .

Como a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$ , não existem mais assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1 - x}{x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

Logo, não existe assíntota oblíqua ao gráfico de $g$ em $+\infty$ .

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

Por outro lado:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} (g(x) - 2x) = \lim_{x \to -\infty} \left( \frac{2x^2 + 1}{x^2} - 2x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Tem-se, assim, que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de $g$ em $+\infty$ e a reta de equação $y = 2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $g$ em $-\infty$.

**5.**

Função $f$:

Assíntotas verticais:

A função $f$ tem domínio $]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$ e é contínua em todo o seu domínio; sendo assim, o gráfico da função $f$ não possui assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 4x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4 - \frac{4}{x}} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 4x} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 + 4x} - 2x\right)\left(\sqrt{4x^2 + 4x} + 2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2 + 4x} + 2x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 4x} + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x\left(\sqrt{4 - \frac{4}{x}} + 2\right)} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 4x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(-\sqrt{4 - \frac{4}{x}}\right) = -2$$

$$(f(x) + 2x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 4x} + 2x\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 + 4x} + 2x\right)\left(\sqrt{4x^2 + 4x} - 2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2 + 4x} - 2x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 4x} - 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{-x\left(\sqrt{4 - \frac{4}{x}} + 2\right)} = \frac{4}{-4} = -1$$

Tem-se, assim, que a reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $f$ em $+\infty$ e a reta de equação $y = -2x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $f$ em $-\infty$.

Função $g$:

Assíntotas verticais:

$D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de $g$.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left( \sqrt{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left( \sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} - x \right)\left( \sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} + x \right)}{\sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} + x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left( -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \right) = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x) = 0 \ \left( \text{análogo ao } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) \right)$$

Tem-se, assim, que a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $g$ em $+\infty$ e a reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $g$ em $-\infty$.

**NOTA:** Em vez de se fazer os cálculos para $-\infty$, pode-se argumentar que a função $g$ é par e, portanto, a reta simétrica a $y = x$ em relação ao eixo das ordenadas tem de ser assíntota oblíqua em $-\infty$.

**6.**

**6.1.**

**6.1.1.** $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 1$

**6.1.2.** $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - 3x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} - 3 - \frac{1}{x} \right) = 2 - 3 - 0 = -1$

**6.2.**

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (3 - 2f(x)) = 3 - 2 \times \infty = \infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de $g$.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - 2f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} - 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =$$
$$= 0 - 2 \times 2 = -4$$

$$\lim_{x \to +\infty} (g(x) + 4x) = \lim_{x \to +\infty} (3 - 2f(x) + 4x) =$$
$$= 3 - 2 \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 3 - 2 = 1$$

A reta de equação $y = -4x + 1$ é assíntota ao gráfico de $g$ .

**7.**

Tem-se:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 1 \times 0 = 0$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ , ou seja, o eixo $Ox$ , é assíntota horizontal ao gráfico de $g$ .

**8.**

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{2x} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de $h$ .

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2} \times (-3) = -\frac{3}{2}$$

As retas de equações $y = \frac{3}{2}$ e $y = -\frac{3}{2}$ são assíntotas horizontais ao gráfico de $h$ .

**9.**

O gráfico (A) não representa a função $f$, pois o gráfico apresentado não tem uma assíntota oblíqua mas sim uma assíntota horizontal (isto é, o declive da assíntota apresentada é $0$ e não $-2$ ) .

O gráfico (B) não representa igualmente a função $f$, uma vez que o gráfico apresentado não representa uma função contínua em $\mathbb{R}^+$ .

Por fim, o gráfico (C) não representa a função $f$ , visto que o gráfico apresentado tem uma assíntota oblíqua de declive positivo e o declive da assíntota oblíqua ao gráfico da função $f$ é $-2$ .